Problemas sobre columnas

Paola Guadalupe Aquino-García[1]

[1]Instituto Tecnológico Superior Zacatecas Occidente

12 de mayo de 2019

Resumen

Con la siguiente práctica se busca resolver un una ecuación de tal manera que se obtenerdrá la fórmula para la carga crítica de las columnas , para lograrlo fue necesario hacer uso de las derivadas,sustitución y despdeje de ecuaciones.

Problema

La fórmula para la carga crítica de una columna fue derivada en 1757 por Leonhard Euler, el gran matemático suizo. El análisis de Euler se basó en la ecuación diferencial de la curva elástica:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(\frac{P}{El}\right) v = 0$$

(1)

Encuentre la solución a esta ecuación y aplique las siguientes condiciones para obtener los valores para las constantes de integración:

$$v = 0 \qquad x = 0 \tag{2}$$

$$v = 0 \qquad x = L \tag{3}$$

Finalmente explique cómo obtener el siguiente resultado:

$$P = n^2 \frac{\pi^2 El}{L^2} \tag{4}$$

Solución

Antes que nada es necesario resolver el diferencial que se tiene en la ecuación para que para posteriormente despejar.

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(\frac{P}{El}\right) v = 0 \tag{5}$$

Debemos obtener la derivada de $\frac{d^2v}{dx^2}$, prima y biprima.

$v = C_1 \sin lx + C_2 \cos lx$

$v^1 = \frac{dv}{dx} = C_1\ l\ \cos lx - C_2\ l\ \sin\ lx$

$v^2 = \frac{d^2v}{dx^2} = -C_1\ l^2\ \sin lx - C_2\ l^2\ \cos\ lx$

Una vez que terminamos de derivar pasamos a sustituir en la ecuación original (1).

$-C_1\ l^2\ \sin lx - C_2\ l^2\ \cos\ lx\ \left(\frac{P}{El}\right)\ (C_1 \sin lx + C_2 \cos lx) = 0$

Se procede a eliminar paréntesis:

$-C_1\ l^2\ \sin lx - C_2\ l^2\ \cos\ lx + C_1\ \left(\frac{P}{El}\right)\ \sin lx + C_2 \left(\frac{P}{El}\right)\ \cos lx = 0$

Simplificamos la ecuación:

$C_1 \sin lx\ \left(\frac{P}{El} - l^2\right)\ s + C_2 \cos lx \left(\frac{P}{El} - l^2\right) = 0$

Despejamos y obtenemos el siguiente resultado:

$v = C_1 \sin\ \sqrt{\frac{P}{El}x}\ + C_2 \cos \sqrt{\frac{P}{El}x}$

Ahora calculamos los valores para las constantes (2) y (3)

$$v = 0 \qquad x = 0 \tag{6}$$

$$v = 0 \qquad x = L \tag{7}$$

$C_1 \sin\ \sqrt{\frac{P}{El}(0)}\ + C_2 \cos \sqrt{\frac{P}{El}(0)}$

$v = 0 \quad x = L$

$v\,(x = L) = C_1 \sin \sqrt{\frac{P}{El}}L = 0$

$\sin\left(\sqrt{\frac{P}{El}}L\right) = 0$

Pasamos sin hacia el lado derecho para que poco a poco vayamos despejando P

$\sqrt{\frac{P}{El}}L = n\pi$

Quitamos la raíz

$\frac{P}{El}L^2 = n^2\pi^2$

Despejamos y finalmente obtenemos en siguiente resultado

$$P = \frac{n^2\pi^2 El}{L^2} \tag{8}$$