Problemas sobre columnas

William Aaron Moreno Sanchez[1]

[1]Instituto Tecnológico Superior Zacatecas Occidente

12 de mayo de 2019

Para el siguiente problemas primeramente se tuvo que proceder a realizar una investigación del tema antes mencionado, en donde vamos a obtener nuestra ecuación diferencial de la curva elástica para tener el resultado de P.

Problema

La fórmula para la carga crítica de una columna fue derivada en 1757 por Leonhard Euler, el gran matemático suizo. El análisis de Euler se basó en la ecuación diferencial de la curva elástica:

$EI \ \frac{d^2v}{dx^2}$

Para el equilibrio del momento se requiere que:

$M = \ -Pv$

$EI \ \frac{d^2v}{dx^2} \ = \ -Pv$

$\frac{d^2v}{dx^2} \ = \ \frac{Pv}{EI}$

Para resolver una ecuación diferencial tenemos que encontrar la solución a nuestro problema.

$\frac{d^2v}{dx^2} \ + \ \left(\frac{P}{EI}\right) \ v \ = \ 0$

$v = \ C_1 \ \sin \lambda x \ + \ C_2 \ \cos \ \lambda x$

$v \ ' = \ \frac{dv}{dx} = \ C_1 \ \lambda \ \cos \ \lambda x \ - \ C_2 \ \lambda \ \sin \ \lambda x$

$v \ '' = \ \frac{d^2v}{dx^2} \ = -C_1 \ \lambda^2 \ \sin \ \lambda x - C_2 \ \lambda^2 \ \cos \ \lambda x$

$-C_1 \ \lambda^2 \ \sin \ \lambda x \ - C_2 \ \lambda^2 \ \cos \ \lambda x \ \left(\frac{P}{EI}\right) (C_1 \ \sin \ \lambda x \ + \ C_2 \ \cos \ \lambda x) = 0$

$-C_1 \ \lambda^2 \ \sin \ \lambda x \ - C_2 \ \lambda^2 \ \cos \ \lambda x \ + C_1 \left(\frac{P}{EI}\right) \ \sin \lambda x + C_2 \ \left(\frac{P}{EI}\right) \ \cos \ \lambda x = 0$

Despejamos y agrupamos los valores anteriores para obtener las siguiente formula:

$C_1 \ \sin \ \lambda x \ \left(\frac{P}{EI} - \lambda^2\right) + C_2 \ \cos \ \lambda x \ \left(\frac{P}{EI} - \lambda^2\right) = 0$

Tenemos como resultado el valor de V en donde en el siguiente paso se usara para el valor de las constantes indicadas.

$v = \ C_1 \ \sin \ \sqrt{\frac{P}{EI} \ x} + C_2 \ \cos \ \sqrt{\frac{P}{EI} \ x}$

Encuentre la solución a esta ecuación y aplique las siguientes condiciones para obtener los valores para las constantes de integración.

En esta parte vamos a calcular los valores de las constantes C1 y C2.

$v = 0 \qquad x = 0$

$v = 0 \qquad x = L$

Obtenemos el valor para la constantes C1 para igualarlas a 0.

$C_1 \ \sin \ \sqrt{\frac{P}{EI}}\,(0) + \ C_2 \ \cos \ \sqrt{\frac{P}{EI}}\,(0) = 0$

Ahora tenemos el valoR para la constantes C2.

$v = 0 \qquad x = L$

$v\,(x = L) \ = \ C_1 \ \sin \ \sqrt{\frac{P}{EI}} L = 0$

$\sin \ \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L\right) = 0$

$\sqrt{\frac{P}{EI}} L = n\Pi$

Con lo anterior vamos a despejar el valor de P para así poder llegar a nuestro resultado

$\frac{P}{EI} \ L^2 \ = \ n^2 \ \Pi \ ^2$

En esta parte el valor de n=1 en la siguiente formula:

$P = \ \frac{n^2 \ \Pi^2 \ EI}{L^2} \qquad\qquad n = 1$

Finalmente obtenemos nuestro resultado.

$P_{cr} \ = \frac{\Pi^2 \ EI}{L^2}$

Conclusión

El problema anterior fue resuelto siguiendo los pasos y las diferentes fuentes de información que se investigaron en donde se tenia que basar en la ecuación diferencial de la curva elástica, por otra parte se procedió a despejar las formulas obtenidas para obtener el valor de cada una de las constantes y finalmente poder llegar a nuestro resultado el cual se nos dio en la practica a investigar de problemas de columnas.