MAT108 | Obligatorisk Innlevering 1

Sondre Gjellestad[1]

[1]Student, HVL

February 9, 2018

Oppgave 1

a)

$$z_1 + z_2$$
$$-2i + 3 - i = 3 - 3i$$

$$z_1 z_2$$
$$-2i(3 - i) = -2 - 6i$$

$$z_1 / z_2$$
$$\frac{-2i}{3 - i} = \frac{-2i(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{-6i + 2}{10} = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$$

b)

$$\sqrt[2]{z_1}$$
$$\sqrt[2]{-2i}$$

c)

$$z^2 - (1-3i)z - 2 - i = 0$$

Ettersom z vil ha en ekte og en kompleks del, omskriver vi den til formen $x + yi$. Deretter isolerer vi den ekte og komplekse delen, slik at vi får to ledd. På andre siden av likhetstegnet legger vi til $0i$ og vet at dette skal være det ønskede resultatet av det komplekse leddet.

$$(x+yi)^2 + (-1+3i)(x+yi) - 2 - i = 0$$
$$(x^2 - y^2 - x - 3y - 2) + i(2xy + 3x - y - 1) = 0 + 0i$$

Når ligningen er på denne formen kan vi omskrive ligningen til et ligningssett, en ligning for den ekte og en for den komplekse delen.

$$\begin{bmatrix} x^2 - y^2 - x - 3y - 2 = 0 \\ 2xy + 3x - y - 1 = 0 \end{bmatrix}$$

Neste steg er å løse ligningssettet. Her løser vi den andre ligningen først, for y.

$$2xy + 3x - y - 1 = 0$$
$$y(2x-1) = -3x + 1$$
$$y = \frac{-3x+1}{2x-1}$$

Deretter setter vi inn resultatet i den første ligningen.

$$x^2 - y^2 - x - 3y - 2 = 0$$
$$x^2 - \left(\frac{-3x+1}{2x-1}\right)^2 - x - \frac{3(-3x+1)}{2x-1} - 2 = 0$$
$$x^2 - \frac{9x^2 - 6x + 1}{4x^2 - 4x + 1} - x - \frac{-9x+3}{2x-1} - 2 = 0$$

Slår sammen til felles brøk, og forenkler.

$$\frac{-(9x^2 - 6x + 1) - (-9x+3)(2x-1) + x^2(2x-1)^2 - x(2x-1)^2}{(2x-1)^2} - 2 = 0$$
$$\frac{4x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 10x + 2}{4x^2 - 4x + 1} - 2 = 0$$
$$4x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 2x = 0$$

Faktoriserer og benytter nullproduktregelen for å finne x-verdier som gir 0.

$$2x(x-1)(2x^2-2x+1)=0$$
$$2x=0\colon\;\; x=0$$
$$x-1=0\colon\;\; x=1$$

Vi setter x-verdiene inn i den andre ligningen for å finne løsninger for y.

$$2xy-y+3x-1=0$$
$$2\cdot 0y-y+3\cdot 0-1=0$$
$$y=-1$$

$$2xy-y+3x-1=0$$
$$2\cdot 1y-y+3\cdot 1-1=0$$
$$y=-2$$

Etter å ha testet løsningene sitter vi igjen med følgende resultat.

$$\begin{pmatrix} x=0, & y=-1 \\ x=1, & y=-2 \end{pmatrix}$$
$$z=-i, z=1-2i$$

Oppgave 2

a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-3}{2x^2-2x-12}$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{x-3}{2(x+2)(x-3)}$$
$$\frac{1-3}{2(1+2)(1-3)}$$
$$\frac{-2}{-12}$$
$$\frac{1}{6}$$

b)

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{2x^2-2x-12}$$
$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{2(x-3)(x+2)}$$
$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{2(x+2)}$$
$$\frac{1}{10}$$

c)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 7x - 5}{2x^3 + x - 4}$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}}$$
$$\frac{3}{2}$$

Oppgave 3

a)

Finn definisjonsmengden til funksjonen. Er f kontinuerlig?

$$f(x) = \frac{(\cos x - 7x)^5}{|x| \sin x}$$

Nei. Når x er 0 er ikke funksjonen definert, og den er derfor ikke kontinuerlig.

b)

Er funksjonen g kontinuerlig?

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & x \leq 0 \\ 1 + x & x > 0 \end{cases}$$

Ja. Funksjonen har ingen punkter der den ikke er definert.

c)

Finn asymptotene (hvis noen) til funksjonen g.

Når x går mot negativ uendelig, går y mot 0.

d)

Har g noen globale maksimum/minimumspunkter?

Nei, men funksjonen vil aldri ha verdi mindre enn 0.