Movimiento oscilatorio amortiguado

victoria blanco[1], bassedasignacio[2], Cecilia Zaza[2], and luz[2]

[1]Affiliation not available
[2]Física 1 Mañana Lunes

March 11, 2018

Abstract

En este trabajo práctico se buscó estudiar el movimiento oscilatorio amortiguado, dado por un sistema compuesto de un resorte y un fluido viscoso, en este caso agua. Se observo el impacto que tuvo la viscosidad del fluido utilizado sobre el movimiento al comparar tanto la amplitud como la frecuencia de este tanto en aire como en agua. Se observo que el amortiguamiento aparece como un decrecimiento en los picos de la función descrita (figura 2) que responde a su vez a una función exponencial decreciente. Se pudo apreciar también que la diferencia en el período de ambos movimientos es relativamente pequeña.

Introducción

El movimiento de tensión y compresión de un resorte muestra que la elongación del mismo aumenta proporcionalmente con la fuerza del resorte, dentro de ciertos límites; esta observación se generaliza con la llamada Ley de Hooke, que se representa en la ecuación (1)

$| | | | | | | | | | | \; F = -\, k \cdot \left(x - x_{(0)}\right)$(Ec.1)

Donde F es la fuerza elástica y k la constante elástica del resorte. El signo negativo indica que la fuerza del resorte es restitutiva (dependiente de la posición).

Un movimiento armónico simple es el que describe una partícula sometida a una fuerza restauradora proporcional a su desplazamiento. Se genera un movimiento periódico, es decir que se repite cada cierto intervalo de tiempo.

En un movimiento armónico simple, donde la única fuerza que actúa es la fuerza elástica, se obtiene la ecuación diferencial (2), luego de realizar las ecuaciones de Newton correspondientes.

$| | | | | | | | | | | | | | \; a = \frac{d^2 x}{dt^2}$ (Ec.2)

Una posible solución a dicha ecuación se muestra en la ecuación (3)

$| | | | | | | | | \; x\,(t) = A \cdot \cos\,(w \cdot t + F) + \; Xeq$ (Ec.3)

Donde A es la amplitud del movimiento, es la fase inicial, Xeq la longitud de equilibrio del movimiento, y ω es la frecuencia de oscilación.

Sin embargo, experimentalmente se observa que la amplitud de un cuerpo oscilante decrece gradualmente con el tiempo hasta que éste se detiene. En este caso se habla de un movimiento armónico amortiguado. A menudo el amortiguamiento surge del contacto del oscilador con alguna superficie, o bien de la resistencia que ofrece el fluido en el cual está inmerso. En este trabajo se estudiará este último motivo.

Figura 1. Esquema de un cuerpo sumergido colgando de un resorte

Sobre el cuerpo actúan las fuerzas : la Fuerza elástica corresponde a la fuerza ejercida por el resorte, el Peso corresponde a la interacción gravitatoria entre el objeto y el centro de la tierra, la Fuerza viscosa es una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad y opuesta a ella, y el empuje es la fuerza que todo cuerpo sumergido siente cuya magnitud es igual al peso del volumen de líquido desalojado.

Al plantear las ecuaciones de Newton para dicho cuerpo, se obtiene la nueva ecuación diferencial para el movimiento amortiguado (4)

$$\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\vert\; F = -k \cdot x - \frac{bx}{g} (\text{Ec.4})$$

La ecuación diferencial (4) tiene como solución a la ecuación (5)

$$\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\vert\; X\left(t\right) = A \cdot e^{-g \cdot t} \cdot \cos\left(w \cdot t + F\right) + Xeq (\text{Ec.5})$$

Donde A es la amplitud del movimiento, que va cambiando conforme varía el término exponencial, γ es el coeficiente de amortiguamiento y es igual a b/2m (donde b es una constante que da cuenta del grado de viscosidad del fluido), Φ es la fase inicial, y ω es la frecuencia de oscilación.

La ecuación que relaciona a las magnitudes ω y γ es la siguiente

$$\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\vert\;\vert\; w = \sqrt{w_0 2 - g^2} (\text{Ec.7})$$

La viscosidad es una propiedad física característica de todos los fluidos, provocando una resistencia a su movimiento. Es una medida de la resistencia al flujo de un fluido. Las fuerzas viscosas en un fluido son proporcionales a la tasa con la cual cambia la velocidad del fluido en el espacio; la constante de proporcionalidad es la viscosidad.

El objetivo de esta práctica es estudiar las propiedades del movimiento oscilatorio amortiguado.

Procedimiento experimental

Para esta práctica, se utiliza un sistema compuesto por un objeto de masa m sujeto a un resorte e inmerso en un fluido viscoso. Se analizó el efecto producido por la presencia del fluido en la amplitud y frecuencia del movimiento resultante.

Se trabajó con una esfera de masa m y una varilla que la une a un resorte. El dispositivo realiza un movimiento oscilatorio sumergido parcialmente en un líquido (agua) que proporciona el rozamiento, de modo tal que la masa que cuelga quede totalmente sumergida en el mismo pero no así el resorte. Para realizar el monitoreo de la oscilación se utilizó un sensor de fuerza, el cual se conectó a una placa sensor DAQ que digitalizaba los datos analógicos recogidos sobre la fuerza ejercida en el sensor.

Para la determinación de la constante de amortiguamiento del agua, se armó un dispositivo similar, que se encuentra ilustrado en la Figura 1.

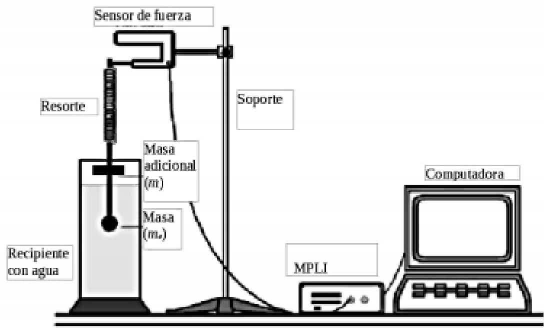

Figure 1: Arreglo experimental que se utilizó para analizar las propiedades del movimiento oscilatorio amortiguado.

Antes de empezar la práctica, se llevó a cabo la calibración del equipo. Por medio de la cual, se obtuvo una ecuación que relaciona al voltaje medido por el sensor con la fuerza ejercida. Todos los datos de la calibración, gráfico obtenido y ecuación, se encuentran en el anexo.

Finalizada la calibración, se comenzó la práctica. Primero, se puso a oscilar la masa fuera del líquido y con el sensor se midió la fuerza ejercida por el resorte durante varios segundos.

Las mediciones de fuerza obtenidas fueron exportadas en un archivo y luego se utilizó el Origin para obtener los máximos del gráfico posición en función del tiempo, obtenido por la experiencia. Entonces, se obtuvieron los máximos de fuerza y sus tiempos correspondientes. Asi, por medio de la obtención del período del movimiento, se puedo calcular el valor de ω .

Para la determinación de γ se utilizaron los métodos:

1) Mediante un procedimiento similar al descrito anteriormente, pero se tomó la precaución de mantener la oscilación del objeto siempre dentro del recipiente con agua. El objeto presentó una disminución de amplitud con el correr del tiempo. γ se determina con la ecuación que la relaciona con la frecuencia, ω.

2) Se realizó un ajuste no lineal.

3) Se linealizó y se realizó luego un ajuste lineal.

En los 2 últimos métodos, γ se obtiene del valor de la pendiente del gráfico.

Resultados y discusión

Utilizando el método 1 se obtuvo un valor de γ y un valor de $e\gamma$, ambos presentes en el anexo. Sin embargo el error calculado es considerablemente mas grande que el valor en sí. Esto en un primer momento indica

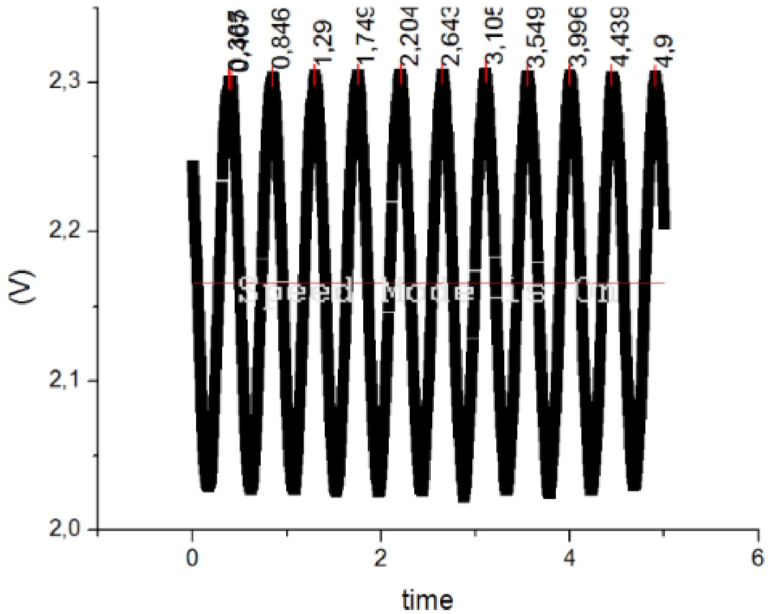

Figure 2: Gráfico obtenido del movimiento oscilatorio.

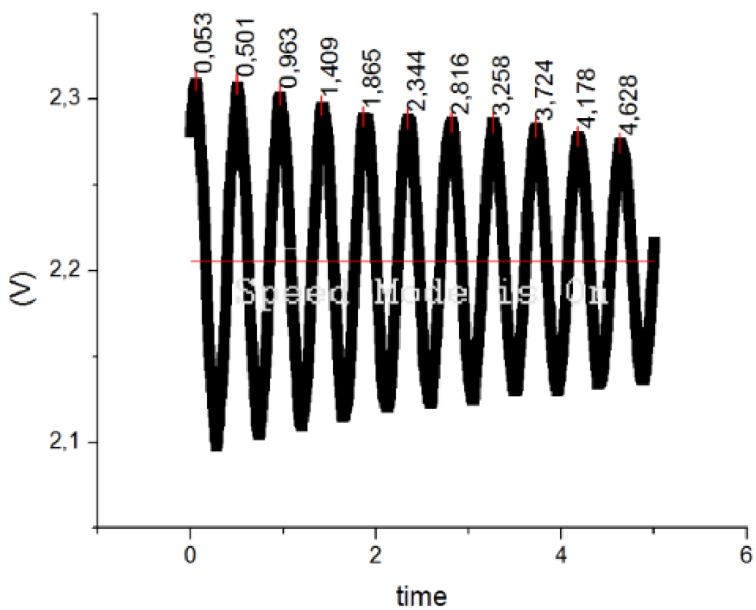

Figure 3: Gráfico obtenido del movimiento amortiguado (sumergido en agua)

que el método 1 no es confiable para hallar γ.

El gráfico obtenido luego del ajuste no lineal del método 2, es el de la Fig.4. El valor de γ (pendiente del gráfico), Fig.3, es -0,35±0,06 .

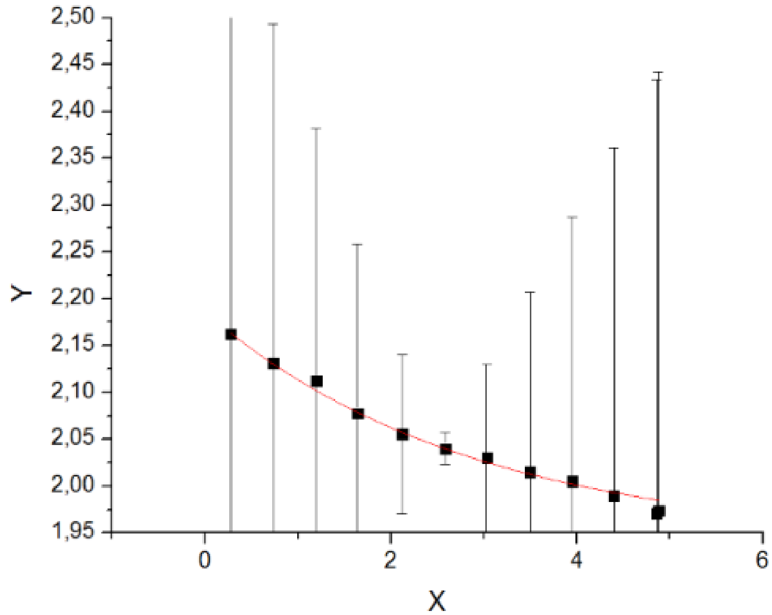

Figure 4: Gráfico del ajuste no lineal del método 2.

Luego de la linealización y del ajuste lineal, método 3, se obtuvo el gráfico de la Fig.5. El valor de γ (pendiente del gráfico), Fig.4, es -0,09±0 004.

Conclusión

La diferencia entre la frecuencia de oscilación entre las dos experiencias realizadas, es muy pequeña (solo varía en unos decimales) y es por ello, que la obtención de γ mediante la ecuación (7) no es útil y se debe recurrir a otros métodos para su correcta obtención, como fueron los métodos utilizados en la práctica. Podemos concluir que el impacto de la viscosidad sobre el movimiento descrito es un descenso de la amplitud, así también como un alargamiento (muy pequeño) del período. El descenso de la amplitúd puede ser asociado con la formula de una exponencial decreciente.

Anexo

El gráfico obtenido al calibrar el equipo, es el que podemos observar en la Fig.6. Con los valores obtenidos de la pendiente del gráfico y de la ordenada al orígen, pudimos obtener ecuación que relacionA al voltaje (V) y la fuerza (F).

$| | | | | | | | | | \; V = 2,54 - 0,21 \cdot F(\text{Ec. } 8)$

En donde: el valor del error de cada magnitud es 2,54±0,003 y -0,21±0,009.

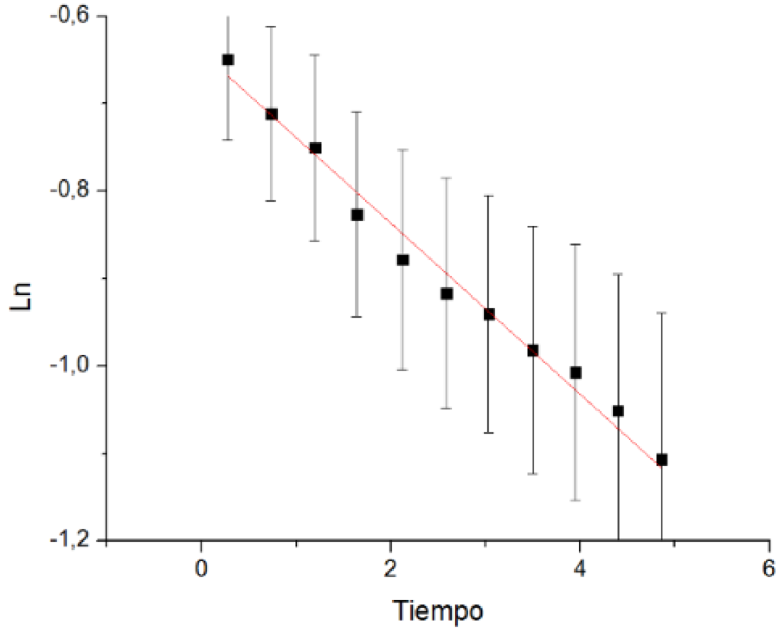

Figure 5: Gráfico de la linealización con ajuste lineal del método 3.

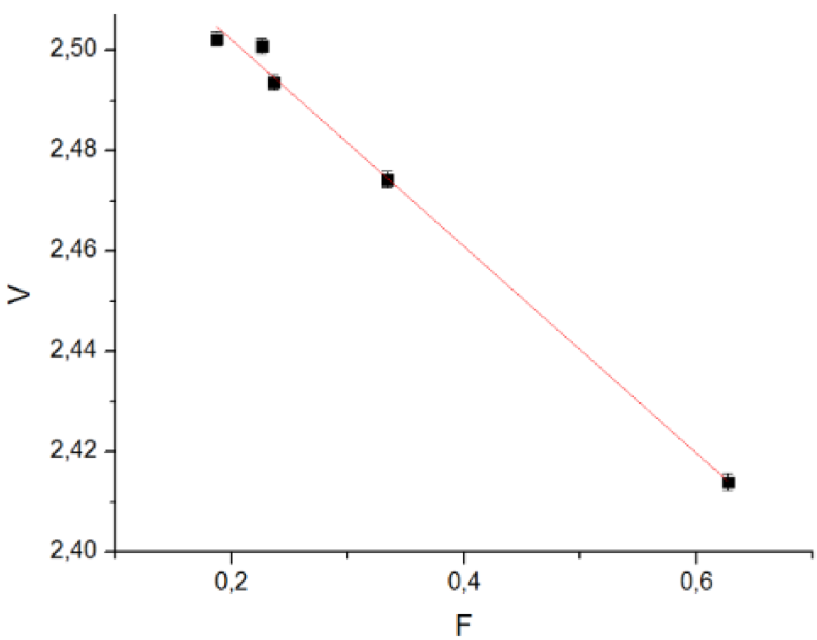

Figure 6: Gráfico calibración.

Cálculos del movimiento oscilatorio en aire

Se realizó un promedio de la distancia entre los picos, para obtener el período. Conociendo que: $T_0 = \frac{2\Pi}{W_0}$ Ecuación 1 se pudo obtener la frecuencia del movimiento estudiado (W_0).

$0,45 = \frac{2\Pi}{W_0}$ por lo que $W_0 = 13,96\ hz$

Luego, sabiendo que $W_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ ecuación 2 obtenemos que la constante elástica del resorte (K) =24,5 N/m.

Calculo de errores:

$$eT_0 = \sqrt{(eEstadistico)^2 + (eInstrumental)^2} = 0,03$$

Donde el error instrumental corresponde a $eT_i = \sqrt{2}.\ et_i$; El error estadístico responde a $eE = \frac{Sd}{\sqrt{n}}$, siendo $n = 9$.

$$eW_0 = \sqrt{\left(\left(-\frac{2\Pi}{T_0^2}\right).eT_0\right)^2} = 0,9$$

En agua

Se realizo el mismo procedimiento que en el caso anterior, obteniendo$T = 0,455$ y $W = 13,81\ hz$

Calculo de errores:

$$eT = \sqrt{\left(\frac{0.0586}{\sqrt{10}}\right)^2 + (0,03)^2} = 0,035$$

$$eW = \sqrt{\left(\left(-\frac{2\Pi}{T^2}\right).eT\right)^2} = 1,06$$

Calculo de γ

Para el cálculo de γ se trabajó sobre la ecuación: $W = \sqrt{[(W_0^2 - \gamma^2)]}$ ecuación 3

De manera que $\gamma = 2,04$

El error de γ calculado de este modo se obtiene de la propagación de los errores de W y W_0.

$$e\gamma = \sqrt{\left(\frac{d\gamma}{dW_0}.eW_0\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dW}.eW\right)^2} = 9,45$$

Calculo por ajuste no lineal

Este método consiste en tomar los picos del gráfico de la medición y ajustarlos a una función exponencial, en cuyo exponente se encuentra γ siguiendo una función del tipo $Y = e^{-\gamma t}$.

Según la linealización, $\gamma = 0,3496$.

El error tomado para este valor fue la desviación estándar. Siendo $Sd = e\gamma = 0,06$

Calculo por linealización

En este método se tomó la formula general que describe el sistema de fuerza en función del tiempo, y, debido a que solo se buscó conocer los picos, se planteó lo siguiente: $F = A'.e^{-\gamma t} + F_0$ donde se ignoró la parte del coseno.

De modo que: $F - F_0 = A'.e^{-\gamma t} = \ln(F - F_0) = \ln(A') - \gamma t$. Cuya forma corresponde a una función lineal donde γ es la pendiente. Por lo que $\gamma = 0,097$

El error tomado para este valor fue la desviación estándar. Siendo $Sd = e\gamma = 0,004$.