Séries de Fourier

andrei

antonio.andreilson

Nosso principal objetivo será provar, entre outras coisas, o seguinte: $\left(1\right)$ se $f\left(x\right)\_{}$ é contínua em todo lugar, e se $f\left(x\right)$ é do período 2$π$; se $f\left(x\right)$ é monótona em partes em [-$π$, $π$], i.e. se existem números $x\_{v}$, 0 $\leq $ v   $\leq $ m com   $x\_{v−1}\leq  x\_{v}$ para 1  $\leq $  v  $\leq $  m,  $x\_{0}=−π$, $x\_{m}=π$, de tal modo que f(x) é monótona em cada [ $x\_{v−1}, x\_{v}$]; então existem números $a\_{n , }b\_{n}$ independentes de x de tal modo que para todos os x nós temos:

$f\left(x\right) = \frac{1}{2}a\_{0} + \sum\_{k=1}^{\infty }a\_{n}cos nx + b\_{n}sen nx$

E, de fato isso é realizado por:

$\left(1\right).$ $\left\{a\_{n}=\frac{1}{π}\int\_{−π^{}}^{π}f\left(x\right)cos nx dx e b\_{n}=\frac{1}{π}\int\_{−π^{}}^{π}f\left(x\right)sen nx dx \right\}$

Esta é a chamada série de Fourier de $f\left(x\right)$.

2) Se removermos a hipótese de monotonicidade por partes, então a conclusão não é válida.

1. Se $a$ < $b$ e se $f\left(x\right)$ é corretamente integrável de  $a$ para $b$, então

$lim\_{w\rightarrow \infty }\int\_{a}^{b}f\left(x\right)sen wx dx = 0$

Prova: Seja $δ>0$ dado com a notação usual, com relação a $f\left(x\right)$, subdividimos o intervalo $\left[a , b\right]$ de tal forma que

$\sum\_{v=1}^{n}e\_{v}s\_{v}<\frac{δ}{2}$

Para cada $w>\frac{4}{δ}\sum\_{v=1}^{n}\left|f\left(\left(a\_{y}\right)\right|\right|$

Nós temos que

$\left|\int\_{a}^{b}f\left(x\right)sen wx dx\right|=\left|\sum\_{v=1}^{n}\int\_{a\_{v−1}}^{a\_{v}}f\left(x\right)sen wx dx\right|=\left|\sum\_{v=1}^{n}\int\_{a\_{v−1}}^{a\_{v}}f\left(x\right)−f\left(a\_{v}\right)\right)sen wx dx+$

$\sum\_{v=1}^{n}f\left(a\_{v}\right)\int\_{a\_{v−1}}^{a\_{v}}sen wx dx∣$ $\leq \sum\_{v=1}^{n}e\_{v}^{\_{}}s\_{v} +\sum\_{v=1}^{n}\left|fa\_{v}\right|\frac{2}{w} < \frac{δ}{2}+\frac{δ}{2}=δ$

Notações: $\left(\rightarrow \right) f\_{−}\left(ξ\right)=lim\_{n\rightarrow ξ}f(x) se existir e \left(\leftarrow \right) f\_{+}\left(ξ\right)=lim\_{n\rightarrow ξ}f(x) se esse limite existir.$ pela observação preliminar ao teorema 457 $f\_{+}\left(ξ\right)$ certamente existe se para algum $c>0$, $f\left(x\right)$ é limitada e monótona para $ξ<x\leq ξ+c$ ( i.e. $f\left(x\_{2}\right)\leq f\left(x\_{1}\right) $ para $ξ<x\_{2}\leq x\_{1}\leq ξ+c$ ou $f\left(x\_{2}\right)\leq f\left(x\_{1}\right)$ para $ξ<x\_{2}\leq x\_{1}\leq ξ+c$) e $f\_{−}\left(ξ\right)$ certamente existe se para algum $c>0, f\left(x\right)$ é limitada e monótona para $ξ−c\leq x<ξ.$

$\left(2\right)$ Deixe que $f\left(x\right)$ seja corretamente integrável de $0 a π$, deixe que $0<c\leq π  $e seja $f\left(x\right)$ monótona de $0<x\leq c.$ Então temos

$lim\_{m\rightarrow \infty }\int\_{0}^{π}\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\frac{x}{2}}dx=2f\_{+}\left(0\right)\int\_{0}^{\infty }\frac{sen y}{y}dy$

Observações preliminares: pelo exemplo do teorema 456 sabemos que a integral a direita existe. A integral á esquerda existe desde:

$G\left(x\right)=$$\left\{sen \left(m+\frac{1}{2}\right)x  para 0<x\leq π\right\}$ou $\left\{2m+1,  para  x=0\right\}$ é contínua em $\left[0 , π\right]$, e, portanto, é integrável de $0$ para $π$.

Prova: 1) Seja $f\_{+}\left(0\right)=0$. Deixe $f\left(x\right)$ ser monótona não decrescente para $0<x\leq c$ (caso contrário, consideramos $− f\left(x\right)$. Seja $f\left(0\right)=0$; caso contrário, mudamos a definição de $f\left(x\right)$ a $0$    ( o que não afeta a hipótese ou a conclusão.)

Seja $δ>0$dado. Escolha um $ϵ$ tal que $0<ϵ<c, 0\leq f\left(ϵ\right)<δ.$ Pelo teorema 405, existe para cada $m>0$ um $η$ ( dependendo de $δ$ e $m$) tal que $0\leq η\leq ϵ,$ $\int\_{0}^{ϵ}f\left(x\right)\frac{sen \left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\frac{x}{2}}dx=\int\_{0}^{ϵ}f\left(x\right)G\left(x\right)=f\left(ϵ\right)\int\_{η}^{ϵ}G\left(x\right)dx=$ $f\left(ϵ\right)\int\_{η}^{ϵ}\frac{sen \left(m +\frac{1}{2}\right)x}{\frac{x}{2}}dx= 2f\left(ϵ\right)\int\_{η\left(m+\frac{1}{2}\right)}^{ϵ\left(m+\frac{1}{2}\right)}\frac{sen y}{y}dy.$ desde que $\int\_{0}^{\infty }\frac{sen y}{y}dy$ converge, temos para uma constante universal adequada $p$ que $\left|\int\_{0}^{w}\frac{sen y}{y}dy\right|<p $ para $w\geq 0,$ de modo que para $0\leq a\leq b$ temos $\left|\int\_{a}^{b}\frac{sen y}{y}dy\right|=\left|\int\_{0}^{b}\frac{sen y}{y}dy−\int\_{0}^{a}\frac{sen y}{y}dy\right|<2p$ de modo que $\left|\int\_{0}^{ϵ}f\left(x\right)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\frac{x}{2}}dx\right|\leq 2f\left(ϵ\right), 2p<4pδ$. Portanto, $\frac{f\left(x\right)}{\frac{x}{2}}$ é devidamente integrável em $\left[ϵ,π\right]$. Temos pelo teorema 476 que para um $m\_{0}$ adequado (dependendo de $ϵ$ e de $δ$) e para $m\geq m\_{0}$

$\left|\int\_{ϵ}^{π}f\left(x\right)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\frac{x}{2}}dx\right|<δ$ de modo a $\left|\int\_{0}^{π}f\left(x\right)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\frac{x}{2}}dx\right|<\left(4p+1\right)δ.$ Portanto, como afirmamos, temos: $lim\_{m\rightarrow \infty }\int\_{0}^{π}f\left(x\right)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\frac{x}{2}}dx=0$

2) No caso geral, segue que de 1), aplicado a $f\left(x\right)−f\_{+}\left(0\right)$ em vez de $f\left(x\right)$, que $\int\_{0}^{π}\left(f\left(x\right)−f\_{+}\left(0\right)\right)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\frac{x}{2}}dx \rightarrow  0$, Mas nós temos $\int\_{0}^{π}f\_{+}\left(0\right)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\frac{x}{2}}dx = 2f\_{+}\left(0\right)\int\_{0}^{π\left(m+\frac{1}{2}\right)}\frac{sen y}{y}dy \rightarrow  $ $2f\_{+}\left(0\right)\int\_{0}^{\infty }\frac{sen y}{y}dy, $ de modo que

$\int\_{0}^{π}f\left(x\right)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\frac{x}{2}}dx \rightarrow  2f\_{+}\left(0\right)\int\_{0}^{\infty }\frac{sen y}{y}dy.$

3) Seja $f\left(x\right)$ corretamente integrável de $−π$ para $π$, seja $0<c\leq π,$ e deixe $f\left(x\right)$ ser monótona para $−c\leq x<0$ e para $0<x\leq c$ (não necessariamente no mesmo sentido para ambos os casos.) Seja $a\_{n}$ definido por (1), então nós temos $\frac{1}{2}a\_{0}+\sum\_{n=1}^{\infty }a\_{n}=\frac{f\_{−}\left(0\right)+f\_{+}\left(0\right)}{2}$

Prova: para $m>0$ inteiro, temos $sen \frac{x}{2}\left(1+2\sum\_{n=1}^{m}cosnx\right)=sen \frac{x}{2}+\sum\_{n=1}^{m}\left(−sen\left(n−\frac{1}{2}\right)x+sen\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)=$

 $sen \left(m+\frac{1}{2}\right)x,$ e, portanto, para $0<\left|x\right|<2π$ nós temos $1+2\sum\_{n=1}^{m}cos nx=\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{sen \frac{x}{2}}$ Portanto, nós temos $\frac{1}{2}a\_{0}+\sum\_{n=1}^{m}a\_{n}=\frac{1}{2π}\int\_{−π}^{π}f\left(x\right)\left(1+2\sum\_{n=1}^{m}cos nx\right)dx=$ $\frac{1}{2π}\int\_{−π}^{π}f\left(x\right)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{sen \frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2π}\int\_{0}^{π}f\left(x\right)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{sen \frac{x}{2}}dx +\frac{1}{2π}\int\_{0}^{π}f\left(−x\right)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{sen \frac{x}{2}}dx$, a configuração  $h\left(x\right)=\left\{\frac{1}{\frac{x}{2}}−\frac{1}{sen \frac{x}{2}} para 0<x\leq π; 0 para x=0\right\}$ Nós temos que $h\left(x\right)$é contínua em $\left[0,π\right] $desde que $\left(\leftarrow \right)lim\_{x\rightarrow 0}h(x)=lim\_{x\rightarrow 0}\left(\frac{sen \frac{x}{2}−\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2}} . \frac{\frac{x}{2}}{sen \frac{x}{2}}\right)=0.1=0$, portanto, pelo teorema 476, temos $\int\_{0}^{π}f\left(x\right)h\left(x\right)sen \left(m+\frac{1}{2}\right)x dx \rightarrow  0 e \int\_{0}^{π}f\left(−x\right)h\left(x\right)sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x dx \rightarrow 0$, daí pelo teorema 477, temos $\int\_{0}^{π}f\left(x\right)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{sen \frac{x}{2}}dx\rightarrow 2f\_{+}\left(0\right)\int\_{0}^{\infty }\frac{sen y}{y}dy$ e $\int\_{0}^{π}f\left(−x\right)\frac{sen\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{sen \frac{x}{2}}dx\rightarrow  2f\_{−}\left(0\right)\int\_{0}^{\infty }\frac{sen y}{y}dy$, consequentemente $\frac{1}{2}a\_{0}+\sum\_{n=1}^{\infty }a\_{n}=\frac{f\_{−}\left(0\right)+f\_{+}\left(0\right)}{2}\int\_{0}^{\infty }\frac{sen y}{y}dy$. Esta última integral pode ser obtida configurando $f\left(x\right)=1$. Então nós temos $\frac{1}{2}a\_{0}=\frac{1}{2π}\int\_{−π}^{π}dx=1, a\_{n}=\frac{1}{π}\int\_{−π}^{π}cos nx dx=\frac{1}{π}\left\{\frac{sen y}{y}\right\}\_{\_{−π}}^{^{π}}=0 para n>0.$  Portanto nós temos $1=\frac{2}{π}\int\_{0}^{\infty }\frac{sen y}{y}dy, \int\_{0}^{\infty }\frac{sen y}{y}dy=\frac{π}{2}$.

4) Seja $f\left(x\right)$ corretamente integrável de$−π para π$, seja $c>0.$ Deixa-se $−π<ξ<π$ e seja $f\left(x\right)$ moótona em $ξ−c\leq x<ξ$ e em $ξ<x\leq c+ξ, $ ou, deixe $ξ=−π$ e seja $f\left(x\right)$ monónotona em $π−c\leq x<π$ e em $−π<x\leq −π+c.$ Sejam $a\_{n, }b\_{n}$ definidos por (1). Então nós temos: $\frac{1}{2}a\_{0}+\sum\_{k=1}^{\infty }\left(a\_{n}cos nξ + b\_{n}sen nξ\right)=$

$\left\{\frac{f\_{−}\left(ξ\right)+f\_{+}\left(ξ\right)}{2} para −π<ξ<π; \frac{f\_{−}\left(π\right)+f\_{+}\left(−π\right)}{2} para  ξ=−π \right\}$.

Prova: deixe $c$ ser $<π$ e seja tão pequeno que dois intervalos de monotonicidade estejam em $−π<x<π.$ Deixe $f\left(x\right)$ ter o período  $2π$; pois de outro modo nós mudamos a definição, e sempre definimos $f\left(x\right)$ de tal maneira que é do período $2π,$ mantendo a antiga definição em $−π\leq x\leq π.$ Isso não afeta a hipóteseou a conclusão. O último então lê simplesmente $\frac{1}{2}a\_{0}+\sum\_{n=1}^{\infty }\left(a\_{n}cos nξ +b\_{n}sen nξ\right)=\frac{f\_{−}\left(ξ\right)+f\_{+}\left(ξ\right)}{2}.$ Agora $F\left(x\right)=f\left(x+ξ\right)$, (no lugar de $f\left(x\right)$), satisfaz as hipóteses do teorema 478 concernentes a $f\left(x\right)$. No lugar de $πa\_{n}$ obtemos $\int\_{−π}^{π}f\left(y+ξ\right)cos ny dy=\int\_{−π+ξ}^{π+ξ}cos n\left(x−ξ\right)dx=\int\_{−π+ξ}^{π}+\int\_{π}^{π+ξ}=$ $\int\_{−π+ξ}^{π}f\left(x\right)cos n\left(x−ξ\right)dx+\int\_{−π}^{−π+ξ}f\left(y+2\right)cos n\left(y+2π−ξ\right)dy=$ $\int\_{−π+ξ}^{π}f\left(x\right)cos n\left(x−ξ\right)dx+\int\_{−π}^{−π+ξ}f\left(y\right)cos n\left(y−ξ\right)dy=$

$\int\_{−π}^{π}f\left(x\right)cos n\left(x−ξ\right)dx=$

$cos nξ\int\_{−π}^{π}f\left(x\right)cos nx dx +sen nξ\int\_{−π}^{π}f\left(x\right)sen nx dx=$

$π\left(a\_{n}cos nξ+b\_{n} sen nξ\right).$ Portanto, temos pelo teorema 478 que $\frac{f\_{−}\left(ξ\right)+f\_{+}\left(ξ\right)}{2}=\frac{F\_{−}\left(0\right)+F\_{+}\left(0\right)}{2}=\frac{1}{2}a\_{0}+\sum\_{n=1}^{\infty }\left(a\_{n}cos nξ +b\_{n}sen nξ\right).$

Exemplo: $f\left(x\right)=x em \left[−π, π\right] $

Nós temos que : $πa\_{n}=\int\_{−π}^{π}cos nx dx = \int\_{0}^{π}xcos\left(nx\right)dx + \int\_{−π}^{0}xcos\left(nx\right)dx=$ $\int\_{0}^{π}x cos nx dx− \int\_{0}^{π}ycos ny dy=0,$ $πb\_{n\_{}}=\int\_{−π}^{π}x sen nx dx=\left\{−x\frac{cos nx}{n}\right\}\_{\_{−π}}^{^{π}}+\frac{1}{n}\int\_{−π}^{π}cos nx dx=−\frac{2π\left(−1\right)^{n}}{n}$, por isso, temos  para $−π<x<π$ que $x=−2\sum\_{n=1}^{\infty }\frac{\left(−1\right)^{n}sen nx}{n}=−2\sum\_{n=1}^{\infty }\frac{sen n\left(x+π\right)}{n}$. Para $x=−π$ cada termo do lado direito é $0$, o que está de acordo com o teorema 479, o que afirma que o valor do lado direito é: $\frac{f\_{−}\left(π\right)+f\_{+}\left(−π\right)}{2}=\frac{π+\left(−π\right)}{2}=0$.

Se $x$ for substituído por $x−π$ nós obtemos :$\sum\_{n=1}^{\infty }\frac{sen nx}{n}=\left\{0 para x=0; \frac{π}{2}−\frac{x}{2} para 0<x<2π\right\} $

A afirmação 1) da introdução está contida no teorema que acabamos de ver, como um caso muito especial, já que $−π\leq ξ<π$ é suficiente por causa da periodicidade, pois para cada um desses $ξ$ existe um $c$ no sentido do teorema que acabamos de ver e como o lado direito da igualdade do teorema acima é $f\left(ξ\right)$ por causa da continuidade e, finalmente, a segunda afirmação da introdução!

Nós não temos $f\left(x\right)=\frac{1}{2}a\_{0}+\sum\_{n=1}^{\infty }\left(a\_{n}cos nx + b\_{n} sen nx\right)$ para toda função contínua $f\left(x\right)$ tendo o período $2π$ onde $a\_{n} e b\_{n}$ são determinados por (1).

Prova: se $n e v$ são inteiros $\geq 0$ nós definimos $A\_{v,n}=\int\_{0}^{π}2sen\left(v+\frac{1}{2}\right)xcos nx dx$

Então nós temos:

$\left(2\right)  A\_{v,n}=\int\_{0}^{π}\left(sen\left(v+\frac{1}{2}\right)x+sen\left(v+\frac{1}{2}−n\right)x\right)dx=$ $\frac{1}{v+\frac{1}{2}+n} + \frac{1}{v+\frac{1}{2}−n}=2\frac{v+\frac{1}{2}}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^{2}}\left\{>0 para n\leq v; <0 para n>v\right\}$.

Portanto; temos para $m>0$ inteiro que $\frac{1}{2}A\_{v,0}+\sum\_{n=1}^{m}A\_{v,n}=\sum\_{n=−m}^{m}\frac{1}{v+\frac{1}{2}+n}=\sum\_{n=m−2v}^{m}\frac{1}{v+\frac{1}{2}+n}\rightarrow 0 $

quando $m\rightarrow \infty .$

Consequentemente $\frac{1}{2}A\_{v,0}+\sum\_{n=1}^{\infty }A\_{v,n}=0,$ de modo que por (2), temos para cada inteiro $m>0$ que $S\_{v,m}=\frac{1}{2}A\_{v,0}+\sum\_{n=1}^{m}A\_{v,n}>0. $ Em particular, temos para $v\geq 1$ que $S\_{v,v}=\frac{1}{2}A\_{v,0}+\sum\_{n=1}^{v}A\_{v,n}>\sum\_{n=1}^{v}\frac{1}{v+\frac{1}{2}−n}>\sum\_{n=1}^{v}\frac{1}{v+1−n}=$ $\sum\_{k=1}^{v}\frac{1}{k}>\int\_{1}^{v}\frac{dy}{y}=lnv$.

Agora vamos definir:$f\left(x\right)=\sum\_{h=1}^{\infty }\frac{sen\left(\left(2^{h^{2}}+1\right)\frac{\left|x\right|}{2}\right)}{h^{2}} para −π\leq x\leq π.$ A série converge uniformemente, já que $\left|sen\right|\leq 1;$ portanto, representa uma função contínua em $\left[−π, π\right]$. Nós temos $f\left(−π\right)=f\left(π\right).$

Se estendermos a definição de $f\left(x\right)$ em todos os lugares, tornando-a periódica com o período $2π,$ então $f\left(x\right)$é contínua em todos os lugares $\sum\_{h=1}^{\infty }\frac{sen\left(\left(2^{h^{2}}+1\right)\frac{x}{2}\right)cos nx}{h^{2}}\left(=f\left(x\right)cos nx\right)$ converge uniformemente em $\left[0,π\right] $ para cada $n\geq 0$ portanto, $\left|sen.cos\right|\leq 1$, disso nós temos $πa\_{n}=\int\_{−π}^{π}f\left(x\right)cos nx dx=2\int\_{0}^{π}f\left(x\right)cos nx dx=$

$\sum\_{h=1}^{\infty }\frac{1}{h^{2}}\int\_{0}^{π}2sen\left(\left(2^{h^{2}}+1\right)\frac{x}{2}\right)cos nx dx=$$$    $\sum\_{h=1}^{\infty }\frac{1}{h^{2}}A\_{2^{h^{2}}−1,n}$, daí, para $m>0 e k>0 $ inteiros, temos que:$S\_{m}= \frac{1}{2}a\_{0}+\sum\_{n=1}^{m}a\_{k}=\frac{1}{π}\sum\_{h=1}^{\infty }\frac{1}{h^{2}}S\_{2^{h^{2}}−1,m}>\frac{1}{π}.\frac{1}{k^{2}}S\_{2^{k^{2}}−1,m}$ de modo que para cada inteiro $k>0, S\_{2^{k^{2}}−1}>\frac{1}{π}.\frac{1}{k^{2}}S\_{2^{k^{2}}−1,2^{k^{2}}−1}>\frac{1}{π}.\frac{1}{k^{2}}ln\left(2^{k^{2}}−1\right)=\frac{k^{3}−1}{k^{2}}.\frac{ln2}{π}$. Portanto, $S\_{m}$ não está limitado, logo $\sum\_{n=1}^{\infty }\left(a\_{n}cos \left(n.0\right)+b\_{n}sen\left(n.0\right)\right) $ diverge.

##