

Entregable 9: Transporte anómalo

R.G. Rodríguez-Giraldo¹

¹Affiliation not available

July 17, 2019

Abstract

Las ecuaciones cinéticas fraccionales de difusión, difusión-advección y de tipo Fokker-Planck se presentan como un enfoque útil para la descripción de la dinámica de transporte en sistemas complejos que se rigen por patrones de relajación anormales y de difusión no exponencial (no Gaussiana). Estas ecuaciones fraccionales se derivan asintóticamente de los modelos básicos de caminatas aleatorias y de una ecuación maestra generalizada. Se discuten varias consecuencias físicas que son relevantes para los procesos dinámicos en sistemas complejos, se introducen métodos de solución y para algunos casos especiales se calculan soluciones exactas. Este informe demuestra que las ecuaciones fraccionales han alcanzado su edad adulta como una herramienta complementaria en la descripción de procesos de transporte anómalos.

LA GUÍA DE LA CAMINATA ALEATORIA SOBRE LA DIFUSIÓN ANÓMALA: UN ENFOQUE DE LA DINÁMICA FRACCIONAL

Prólogo: el alcance, y por qué molestarse en absoluto

¿Qué pueden hacer las ecuaciones fraccionales, qué pueden hacer mejor y por qué deberían importarnos?

Antes de empezar con la Introducción, se abordan algunos temas que pueden interesar a muchas personas que no están familiarizados con el cálculo fraccional.

La universalidad: La estructura detallada del propagador $W(r, t)$, es decir, la función de densidad de probabilidad (pdf) para la condición inicial $\lim_{t \rightarrow 0^+} W(r, t) = \delta(r)$, depende, en general, de la especial forma de la geometría subyacente. Sin embargo, la parte interesante del propagador tiene el comportamiento asintótico $\log W(r, t) \sim c\xi^u$ donde $\xi \equiv r/t^{\alpha/2} \gg 1$, que se espera que sea universal. Aquí, $u = 1/(1 - \alpha/2)$ con α como el exponente de difusión anómalo. Las ecuaciones fraccionales que consideramos a continuación son universales en este aspecto, ya que no consideramos ninguna forma de trastorno inactivado. Nuestros resultados para la difusión anómala son equivalentes a los hallazgos de modelos de caminatas aleatorias en un soporte isotrópico y homogéneo.

La no-universalidad: En contraste con la definición gaussiana, la difusión fraccional no es universal en el sentido de que involucra un parámetro α , que es el orden de la derivada fraccional. Obviamente, la naturaleza a menudo viola la universalidad gaussiana reflejada en resultados experimentales que no siguen las predicciones gaussianas. Las ecuaciones de difusión fraccional explican las características anómalas típicas que se observan en muchos sistemas.

La ventaja de los modelos de caminata aleatoria: Dentro del enfoque fraccional es posible incluir campos externos de manera directa. También es posible considerar el transporte en el espacio de fase abarcado

por ambas coordenadas de posición y velocidad dentro del mismo enfoque. Además, el cálculo de los problemas de valor de frontera es análogo al procedimiento de las ecuaciones estándar correspondientes.

La comparación con otros enfoques: El enfoque fraccional es en cierto sentido equivalente al enfoque de la ecuación maestra generalizada. La ventaja del modelo fraccional nuevamente reside en la manera directa de incluir términos de fuerza externa y de calcular problemas de valor de frontera. A la inversa, las ecuaciones de Langevin generalizadas conducen a una descripción diferente, ya que corresponden a las ecuaciones de Fokker-Planck que son locales en el tiempo y que contienen coeficientes dependientes del tiempo. En la mayoría de los casos de transporte browniano, la ecuación determinista de Fokker-Planck se emplea para la descripción de la dinámica estocástica de los campos externos. En analogía, promovemos el uso de la ecuación fraccional de Fokker-Planck para situaciones donde la difusión anómala subyace en el sistema.

La ventaja matemática: Un tema muy conveniente es que las técnicas estándar para resolver ecuaciones diferenciales parciales o para calcular momentos de transporte relacionados también se aplican a las ecuaciones fraccionales.

La relación entre la solución fraccional y su contraparte browniana: Existe una transformación que mapea la solución browniana en la solución fraccional correspondiente, una relación interesante que es útil para el análisis analítico y numérico.

Es un enfoque simple: La aparición de ecuaciones fraccionales es muy atractiva debido a su proximidad a las ecuaciones estándar análogas. Recientemente se ha demostrado que la ecuación fraccional de Fokker-Planck se puede derivar de una ecuación de Langevin con ruido blanco gaussiano para sistemas donde se produce la captura. Esto ofrece una idea de los mecanismos físicos que conducen a la cinética fraccional.

Las ecuaciones cinéticas fraccionales no son solo otra forma de presentar historias antiguas. Creemos que son un marco poderoso que es útil para muchos sistemas. Al relacionar nuestro trabajo y el de otros en ese campo y ponerlo en un contexto más general, el presente informe puede ser la base para algunas investigaciones activas sobre dinámicas complejas utilizando una herramienta tan antigua y nueva como el cálculo clásico.

¿Cuál es el alcance de este informe?

Presentamos un informe sobre la teoría del transporte anómalo: La difusión anómala es un campo involucrado con sutilezas intrigantes. En consecuencia, los parámetros y los exponentes pueden cambiar en el transcurso del tiempo y/o espacio o cuando se activa o desactiva una fuerza externa, etc. Es decir, es de nuestro interés conocer y entender el exponente de difusión anómalo dado.

El foco está en la subdifusión: El cuerpo principal del texto se ocupa de los procesos de transporte que, en el límite de fuerza-libre, son más lentos que la difusión browniana. Estos procesos son llamados subdifusivos o dispersivos que tienen lugar en un campo de fuerza externo y cuyo límite de fuerza-libre corresponde a la subdifusión. Ocasionalmente, tales procesos se denominan fraccionales.

Se debe tener cuidado con los vuelos de Lévy: Los vuelos de Lévy no poseen un desplazamiento cuadrado medio finito. Su importancia física, por lo tanto, ha sido cuestionada ya que las partículas con una masa finita no deben ejecutar saltos largos instantáneamente. Los consideramos en cierta medida a continuación, ya que hay casos especiales cuya descripción en términos de vuelos de Lévy corresponde a principios físicos.

Caminata de Lévy La forma correcta de considerar los sistemas que cuentan con distribuciones de longitud de salto de tipo Lévy es introducir una velocidad finita para la partícula de prueba, un modelo denominado caminata de Lévy. Un primer paso hacia una formulación de dinámica fraccional se ha presentado recientemente.

El cálculo del orden entero de Newton se ha utilizado en el modelado físico. La profecía del rival de Newton, Leibniz, ya había afirmado en 1695: "Por lo tanto, se deduce que $d^{1/2}x$ será igual a $s\sqrt{dx} : x$, una para-

doja aparente, de la que se extraerán consecuencias útiles algún día”, creemos que la siguiente explicación representa un respuesta afirmativa a esta primera afirmación de Leibniz hacia el cálculo fraccional.

Introducción

Dinámica anómala en sistemas complejos

Los sistemas complejos y la investigación de sus propiedades estructurales y dinámicas se han establecido en la agenda de la física. Estas “estructuras con variaciones” [1] se caracterizan por:

- (i) una gran diversidad de unidades elementales,
- (ii) fuertes interacciones entre las unidades, o
- (iii) una evolución anómala o no predecible en el transcurso del tiempo [2]; [3].

Los sistemas complejos y su estudio juegan un rol dominante en las ciencias exactas y de la vida, abarcando una riqueza de sistemas tales como vidrios, cristales líquidos, polímeros, proteínas, biopolímeros, organismos o incluso ecosistemas. En general, la evolución temporal de y dentro de, tales sistemas se desvían de las leyes estándar correspondientes [2]; [4]. Con el desarrollo de resoluciones experimentales más altas, o la combinación de diferentes técnicas experimentales, estas desviaciones se han hecho más prominentes, ya que las ventanas de datos más grandes accesibles son más concluyentes. Por lo tanto, la relajación en sistemas complejos se desvía del patrón exponencial clásico de Debye [5]; [6]; [7]; [8]; [9]; [10]

$$\Phi(t) = \Phi_0 \exp(-t/\tau), \quad (1)$$

y a menudo se puede describir en términos de una ley exponencial estirada de Kohlrausch-Williams-Watts [11]; [12]; [13]; [14]; [15]

$$\Phi(t) = \Phi_0 \exp(-(t/\tau)^\alpha), \quad (2)$$

para $0 < \alpha < 1$ o por una ley de potencia asintótica [9]; [13]; [14]; [16]; [17]; [18]; [19]

$$\Phi(t) = \Phi_0(1 + t/\tau)^{-n}, \quad (3)$$

con $n > 0$. También es posible observar transiciones desde el patrón exponencial estirado (2) al comportamiento de ley de potencia (3) [20]; [21]; [22].

De manera similar, los procesos de difusión en varios sistemas complejos generalmente ya no siguen las estadísticas de Gauss, y por lo tanto, la segunda ley de Fick no describe el comportamiento del transporte relacionado. Especialmente, se observan desviaciones de la dependencia del tiempo lineal del desplazamiento cuadrático medio

$$\langle x^2(t) \rangle \sim K_1 t \quad (4)$$

que es característico del movimiento browniano y, como tal, consecuencia directa del teorema del límite central y la naturaleza markoviana del proceso estocástico subyacente [23],[24]. En cambio, la difusión anómala se encuentra en una amplia diversidad de sistemas, siendo su sello distintivo el crecimiento no lineal del

desplazamiento cuadrático medio en el transcurso del tiempo. En este informe, nos concentramos en el patrón de ley de potencia

$$\langle x^2(t) \rangle \sim K_\alpha t^\alpha \quad (5)$$

que es ubicuo para un número diverso de sistemas [14],[25]-[26]. Existe una variedad de otros patrones, como la dependencia del tiempo logarítmico, que no tratamos aquí. El comportamiento anómalo de difusión que se manifiesta en la ec. (5) está íntimamente relacionado con la ruptura del teorema del límite central que es causado por distribuciones amplias o correlaciones de largo alcance. En cambio, la difusión anómala se basa en la validez del teorema del límite central generalizado de Lévy-Gnedenko para situaciones en las que no existen todos los momentos de los eventos de transporte elementales subyacentes [25],[27]; [28]; [29]; [30].¹ Por lo tanto, las distribuciones espaciales amplias de saltos o tiempos de espera conducen a propagadores no gaussianos y posiblemente a una evolución temporal no markoviana del sistema, siendo esta última una manifestación típica de fenómenos temporales no locales encontrados en una amplia gama de sistemas [1,3,4,59-63]. Tenga en cuenta que el coeficiente de difusión generalizado K_α en la ecuación (5) tiene la dimensión $[K_\alpha] = cm^2 s^{-\alpha}$. De acuerdo con el valor del exponente anómalo de difusión, definido en la ecuación (5), se pueden distinguir varios dominios de transporte anómalo, como se muestra en la Fig.1. En lo que sigue, el énfasis principal se pondrá en la descripción de los fenómenos subdifusivos, que corresponden a $0 < \alpha < 1$.

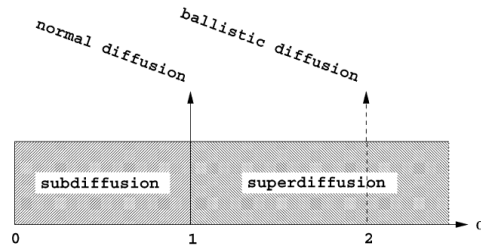


Fig. 1. Different domains of anomalous diffusion, defined through the mean squared displacement, Eq. (5), parametrised by the anomalous diffusion exponent α : (a) subdiffusion for $0 < \alpha < 1$, (b) superdiffusion for $\alpha > 1$. On the threshold between sub- and superdiffusion is the normal Brownian diffusion located. Another special case is ballistic motion ($\alpha = 2$).

Figure 1: This is a caption

Observaciones históricas

La formulación estocástica de los fenómenos de transporte en términos de un proceso de paseo aleatorio², así como la descripción a través de la ecuación de difusión determinista³, son los dos conceptos fundamentales en la teoría de la difusión normal y anómala. De hecho, la historia de esta descripción dual basada en un movimiento errático y en una ecuación diferencial para la función de densidad de probabilidad es bastante interesante y vale mucho una breve digresión. Así, el físico holandés Jan Ingenhousz⁴ observó un pequeño parpadeo de partículas de polvo de carbón en la superficie del alcohol en 1785. En 1827, el botánico escocés Robert Brown [67] observó un movimiento irregular similar de grano de polen pequeño bajo un microscopio.⁵

¹En realidad, la noción de momentos divergentes se remonta a la formulación de **St Petersburg paradoxa** por Nicolaas Bernoulli y su análisis por Daniel Bernoulli en 1724 [38,49]

²El concepto de caminata aleatoria fue introducido formalmente por Karl Pearson en 1905 [65].

³Utilizamos la palabra determinista para distinguir la ecuación diferencial parcial para la función de densidad de probabilidad $W(x, t)$ de una ecuación diferencial estocástica como la ecuación de Langevin [37,64], comparar, por ejemplo, Risken [36].

⁴Más tarde, el practicante personal de la emperatriz austriaca Maria Theresia, también descubrió el proceso de respiración de las plantas.

⁵También reconoció la importancia del núcleo celular.

Aproximadamente al mismo tiempo, en 1822, Joseph Fourier ideó la ecuación de conducción de calor, sobre la base de la cual A. Fick estableció la ecuación de difusión en 1855 [68].⁶ Posteriormente, los experimentos detallados de Gouy demostraron la cinética. explicación teórica dada por C. Weiner en 1863. Después de intentos de encontrar una base estocástica como el modelo de colisión de von NaK geli y John William Strutt, los resultados de Lord Rayleigh, fue Albert Einstein quien, en 1905, unió los dos enfoques en sus tratados sobre la moción browniana, un nombre acuñado por Einstein aunque, según se informa, no tuvo acceso al trabajo original de Brown. Se tiene en cuenta que el matemático francés Louis Bachelier presentó una descripción similar de la divergencia en su edición de 1900, la Tesis [69], en términos de valores de stock en lugar de cantidades físicas [38,70]. Una aplicación importante de los resultados de Einstein fue la medición independiente del número ⁷ de Avogadro por Jean Baptiste Perrin, A. Westgren y Eugen Kappler [26,28,71-74], con una precisión bastante alta. Algunos resultados de Perrin se muestran en la Fig. 2 y son parte del trabajo que le valió el Premio Nobel en 1926. El paseo aleatorio que se puede observar experimentalmente, representa por lo tanto un vínculo entre la dinámica microscópica de átomos pequeños que bombardean una partícula más grande en suspensión, y observables macroscópicos como el coeficiente de difusión, o el número de Avogadro. En la Fig. 3, se reproducen los datos obtenidos por Kappler con su configuración de alta precisión utilizando un método de detección óptica ⁸. Las ideas de Einstein también prepararon el escenario para el tratamiento de Langevin [37,64] del movimiento browniano con el supuesto de una fuerza errática externa, y las teorías de Fokker-Planck [78,79], Smoluchowski⁹ y Klein-Kramers [81,82] que culminaron en los tratados de Ornstein y Uhlenbeck, Chandrasekhar y otros, y más tarde en las obras de Elliott Montroll, y colaboradores [24,83-86]. El tratamiento matemático del movimiento browniano se debe principalmente a Norbert Wiener, quien demostró que la trayectoria de una partícula browniana es (casi) en todas partes continua pero en ninguna parte diferenciable [87]. Esta observación se relaciona con la naturaleza propia del proceso de difusión cuya trayectoria espacial resultante es auto-similar¹⁰ [27,38,88-93]. Otras contribuciones matemáticas importantes se atribuyen a J. L. Doob, Mark Kac, W. Feller y otros.

Difusión anómala: experimentos y modelos

Se ha conocido una separación anómala desde el tratado de Richardson sobre la difusión turbulenta en 1926 [94]. Dentro de la teoría del transporte se ha estudiado desde finales de los años sesenta, en particular, su investigación teórica fue instigada por Scher y Montroll en su descripción del transporte dispersivo en semiconductores amorfos, un sistema en el que los métodos tradicionales probaron fallar. Las predicciones de su enfoque de caminata aleatoria en tiempo continuo eran muy distintas de su contraparte browniana y se demostró que proporcionaban explicaciones para una variedad de cantidades físicas y fenómenos en numerosas realizaciones experimentales [31]; [32]; [33]; [34]; [35]; [36]; [37]; [38]; [39]; [40]; [41]. También se deben importantes contribuciones a Weiss [24] y Shlesinger [42]. Además de la descripción de la caminata aleatoria, se desarrollaron generalizaciones de la ecuación de difusión que dan cuenta de las estadísticas de transporte anómalo. Hoy en día, la lista de sistemas que muestran un comportamiento dinámico anómalo es bastante extensa [14,40-55,101,102] y aloja, entre otros, los siguientes sistemas en el régimen subdifusivo:

⁶En el contexto histórico, tenga en cuenta que la teoría de la formulación continua de dinámica de fluidos ya se había desarrollado completamente en ese momento. Así, algunos de sus hitos se remontan al siglo XVIII y la primera mitad del siglo XIX, como la ecuación de Bernoulli (1738); la ecuación de Euler (1755); el uso de Navier (1827) como modelo fenomenológico y la derivación de Stokes (1845) de la ecuación de Navier Stokes. La teoría dinámica de los gases de Maxwell se remonta a 1867 y la ecuación de transporte de Boltzmann se publicó en 1872 para la descripción de los procesos de colisión. Esta última es la base del enfoque de caminata aleatoria

⁷Históricamente, a menudo se lo conoce como el número de Loschmidt [28].

⁸se proporciona una explicación detallada en el título de la figura

⁹La ecuación de Fokker-Planck univariada que se discute aquí a menudo se denomina ecuación de Smoluchowski [80].

¹⁰“Le processus stochastique, que nous appellerons mouvement brownien lineaire, est une schematisation, qui represente bien les proprietes du mouvement brownien reel observable a une echelle assez petite, mais non infinite petite, et qui suppose que nous comptons par exemple importe quelle echelle”. (Paul Lévy [27]) [El proceso estocástico que llamaremos movimiento browniano lineal es una representación esquemática que describe bien las propiedades del movimiento browniano real, observable de manera suficientemente pequeña, pero no en nitidez”, e.d, a pequeña escala, y que asume que las mismas propiedades existen en cualquier escala.]

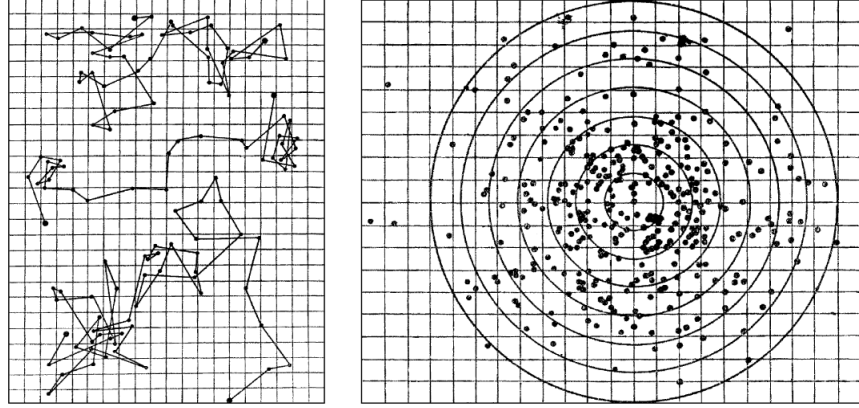
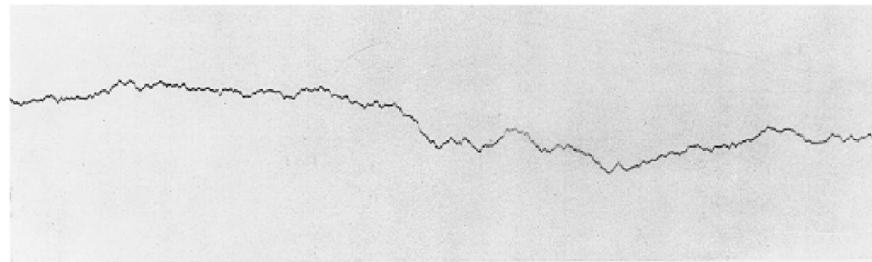


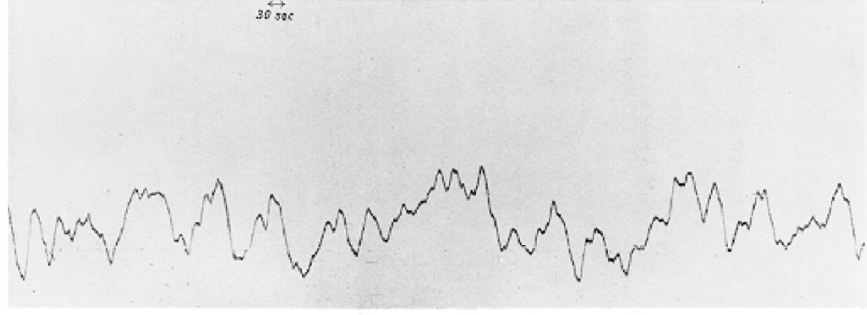
Figure 2: Trayectorias de caminatas aleatorias gravadas por Perrin. Parte izquierda: tres diseños obtenidos al trazar un pequeño grano de masilla (masilla, utilizada para barniz) a intervalos de 30 s. Uno de los patrones contiene 50 puntos individuales. Parte derecha: el punto de inicio de cada evento de movimiento se desplaza al origen. La figura ilustra el pdf de la distancia recorrida r para estar en el intervalo $(r, r + dr)$, según $(2\pi\xi^2)^{-1} \exp(-r^2 / [2\xi^2]) 2\pi r dr$, en dos dimensiones, con la varianza de longitud ξ^2 . Estas figuras forman parte de la medida de Perrin, Dabrowski y Chaudesaigues que llevan a la determinación del número de Avogadro. El resultado dado por Perrin es 70.5×10^{22} . El notable trabajo de Perrin en donde analiza todas las posibilidades de obtener el número de Avogadro conocido en ese momento. Con respecto a las trayectorias que se muestran en la parte izquierda de esta figura, Perrin hace una declaración interesante: [Si, en verdad, uno tomara la posición de segundo a segundo, cada uno de estos segmentos rectilíneos se reemplazaría por un contorno poligonal de 30 bordes, cada uno de los cuales tan complicado como el diseño reproducido, y así sucesivamente.] Esto ya anticipa el conocimiento de Lévy de la naturaleza similar a sí mismo, vea la nota 9, así como del reconocimiento de no diferenciación por N. Wiener.

transporte de portadores de carga en semiconductores amorfos [31]; [32]; [33]; [34]; [35]; [36]; [37]; [38]; [39]; [40]; [41][43]; [44]; [45], difusometría de resonancia magnética nuclear (RMN) en percolativo [105,106] y sistemas porosos [107,108], dinámica de reptación en sistemas poliméricos [109-115], transporte en geometrías fractales [46]; [47], la difusión de un marcador escalar en una serie de rodillos de convección [118,119], o la dinámica de un cordón en una red polimérica [120,121]. Las estadísticas de superdifusión o Levy se observan en dominios especiales de flujos rotativos [122], en difusión de deslizamiento colectivo en superficies sólidas [123], en campos de velocidad en capas [124,125], en difusión turbulenta de Richardson [94,126-129], en intercambio de superficie a granel dinámica controlada en vidrios porosos [130-132], en el transporte en sistemas micelares y en rocas heterogéneas [133-135], en óptica cuántica [136,137], espectroscopia de molécula única [138,139], en el transporte en plasma turbulento [140], movimiento bacteriano [141-145] e incluso para el vuelo de un albatros [146].



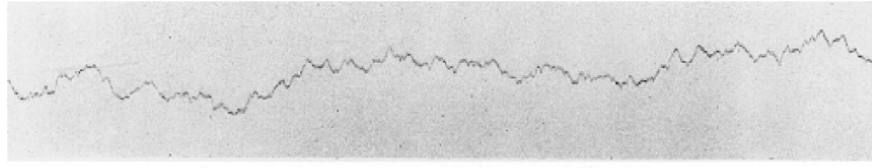
Registrieraufnahme der Brownschen Bewegung (Methode B) (natürliche GröÙe).
Direktionskraft $2,66 \cdot 10^{-9}$ abs. Einh. Trägheitsmoment $6,1 \cdot 10^{-6}$ abs. Einh. Skalenabstand: 86,5 cm.
Zeitmarke: 30 sec $dx = 2$ mm. a) Atmosphärendruck. Temperatur 15°C

Fig. 4a



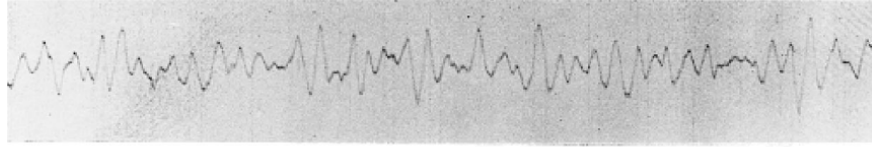
Registrieraufnahme der Brownschen Bewegung (natürliche Größe).
 Direktionskraft $2,66 \cdot 10^{-9}$ abs. Einh. Trägheitsmoment $6,1 \cdot 10^{-9}$ abs. Einh. Abstand Spiegel-Kamera: 86,5 cm.
 Zeitmarke: 30 sec $dx = 2$ mm. b) $4 \cdot 10^{-3}$ mm Hg. Temperatur 10°C

Fig. 4b



Registrieraufnahme der Brownschen Bewegung (natürliche Größe).
 Direktionskraft $9,428 \cdot 10^{-9}$ abs. Einh. Trägheitsmoment: $1 \cdot 10^{-7}$ abs. Einh. Abstand Spiegel-Kamera: 72,1 cm.
 Zeitmarke: 30 sec $dx = 1$ mm. a) Atmosphärendruck. Temperatur 13°C

Fig. 5a



Registrieraufnahme der Brownschen Bewegung (natürliche Größe).
 Direktionskraft $9,428 \cdot 10^{-9}$ abs. Einh. Trägheitsmoment $1 \cdot 10^{-7}$ abs. Einh. Abstand Spiegel-Kamera: 72,1 cm.
 Zeitmarke: 30 sec $dx = 1$ mm. b) $1 \cdot 10^{-3}$ mm Hg. Temperatur 13°C

Fig. 5b

Figure 3: Fig. 3. Comportamiento erróneo del movimiento browniano visible en una medición de alta precisión. Datos de un registrador Edelmann, obtenidos por Kappler en 1931 [74]. Siguiendo los cálculos de Smoluchowski [75] y las primeras mediciones de Gerlach y Lehrer [76,77], Kappler supervisó el movimiento browniano de un espejo pequeño (superficie de aprox. 1 mm^2), suspendido de un hilo de cuarzo ne (varios cm de largo y algunas μm). El cuadrado medio del desplazamiento torsional φ^2 , sigue la relación $\varphi^2 = k_B T$, donde D es la fuerza direccional de la suspensión [74]. Los facsímiles muestran cuatro realizaciones diferentes. A partir de sus datos, Kappler obtuvo el número de Avogadro Loschmidt $N_L = 60.59 \times 10^{22} \pm 1\%$, con una precisión notable.

La difusión anómala en presencia o ausencia de una velocidad externa o campo de fuerza se ha modelado de numerosas maneras, incluyendo (i) movimiento browniano fraccional que se remonta a Benomit Mandelbrot [89-93,147], (ii) ecuaciones de difusión generalizadas [148], (iii) modelos de caminata aleatoria de tiempo continuo [52,95-99,101,102,149-155], (iv) ecuaciones de Langevin [156-160], (v) ecuaciones de Langevin generalizadas [62,161-163], (vi) ecuaciones maestras generalizadas [164-167], o (vii) termostática generalizada [168-172]. Para una difusión anómala, solo los enfoques (iii) y (v) incorporan la memoria del sistema y la forma especial que se espera para la pdf, de manera consistente. La desventaja de los recorridos aleatorios de tiempo continuo y de la ecuación maestra generalizada es que no existe una forma directa de incorporar campos de fuerza, problemas de valores de frontera o considerar la dinámica en el espacio de fase. El enfoque alternativo a la cinética anómala que vamos a presentar se da en términos de ecuaciones fraccionales que

parecen estar diseñadas para este tipo de problemas, como la consideración de campos externos y problemas de valor de frontera. En las obras originales [48]; [49]; [50], se observó que la sustitución de la derivada temporal local en la ecuación de difusión por un operador fraccional da cuenta de los efectos de la memoria que están conectados con muchos sistemas complejos. Recientemente, una década después de su introducción, tales ecuaciones cinéticas fraccionales han atraído mucho interés. Actualmente se están estudiando y reconociendo ampliamente como herramientas importantes en la descripción de procesos de transporte anómalos, tanto en ausencia como en presencia de campos externos de velocidad o fuerza. Especialmente en este último caso, su estructura matemática permite la aplicación de métodos conocidos de solución. En el transcurso de este desarrollo, se han publicado varios trabajos que tratan de ecuaciones de relajación fraccional y modelos reológicos fraccionales [20,21,176-182], ecuaciones de difusión fraccional (FDE) [173-175,183-201], ecuaciones de difusión-advección fraccional(FDAE) [202-209], y ecuaciones de Fokker-Planck fraccionales (FFPE) [158-160,193,202,203,210-221]. De este modo, se han empleado diversas generalizaciones al orden fraccional, es decir, se han introducido diferentes operadores fraccionales para reemplazar la derivada del tiempo o las derivadas espaciales que ocurren, o ambas. En los primeros intentos de generalizar la ecuación de difusión estándar para la descripción de procesos de difusión en geometrías fractales de dimensión d_f , se asumieron los coeficientes de difusión dependientes del radio. O'Shaughnessy y Procaccia estudiaron la ecuación de difusión generalizada [51]¹¹

$$\frac{\partial W}{\partial t} = R^{1-d_f} \frac{\partial}{\partial R} R^{1-d_f} K(R) \frac{\partial}{\partial R} W(R, t) \quad (6)$$

con el coeficiente de difusión dependiente del radio $K(R) = K R^{-\Theta}$, y derivó el propagador correspondiente

$$W(R, t) = A(\Theta, d_f) (K[2 + \Theta]^2 t)^{-d_f/(2+\Theta)} \exp\left(-\frac{R^{2+\Theta}}{K(2 + \Theta)^2 t}\right). \quad (7)$$

Aquí, $\Theta = d_f + \sigma - 2$ está conectado al índice σ de ley de potencia del radio-dependiente, resistencia eléctrica integrada, $\Re(R) \sim R^\sigma$ de la estructura fractal subyacente cuya densidad de masa se escala como $\propto R^{d_f-3}$ en la incrustación 3-dimensional. El desplazamiento al cuadrado medio para este proceso, dado por la ecuación (5) con $\alpha = 2/(2+\Theta)$, se puede inferir fácilmente. Como Θ es positivo, este resultado implica una subdifusión [51]. Investigaciones posteriores indicaron que la forma asintótica del propagador en fractales, como la junta Sierpinski, viene dada por la forma de escalado [52]; [53]

$$W(R, t) = A(\alpha, \beta) \xi^\beta \exp(-c \xi^u). \quad (8)$$

con $\xi = R/t^{\alpha/2}$, $u = 1/(1-\alpha/2)$ y β es una cantidad dependiente del sistema [224]. Ec. (8) está en desacuerdo con el resultado anterior, Eq. (7). Para la subdivisión, $0 < \alpha < 1$, que prevalece en las estructuras fractales, $u \in (0, 2)$, por lo que la expresión (8) se suele denominar gaussiana estirada. Por el contrario, se demostró que las ecuaciones de difusión fraccionales para el transporte en estructuras fractales cumplían con las propiedades básicas, como el propagador (8), la probabilidad de retorno al origen, el desplazamiento cuadrado medio y la naturaleza no markoviana [183,184,225]. Para los sistemas isotrópicos homogéneos en los que estamos interesados, se sabe a partir de modelos aleatorios que el propagador se comporta de forma asintótica, como

$$W(R, t) \sim b_0 t^{\gamma d/2} \xi^\beta \exp(-b_1 \xi^v). \quad (9)$$

con $\xi = d^{1/2} r/t^{\alpha/2}$, $v = 1/(1-\alpha/2)$, $\beta = d(1-\alpha)/(2-\alpha)$, y b_0 y b_1 son constantes que dependen de α y dimensión d [238,239]. Dicho comportamiento se reproduce mediante las ecuaciones de difusión fraccionales que anticipó Balakrishnan [173] y las primeras formuladas por Wyss [174], y Schneider y Wyss [175]. En la

¹¹La R mayúscula se refiere al promedio del radio sobre el soporte fractal que es necesario para obtener la dependencia del radio suave.

Sección 3 mostramos que el comportamiento asintótico (9) es consistente con la expansión asintótica de la solución exacta de la ecuación de difusión fraccional. Las ecuaciones de cinética fraccional, su base y solución forman la pieza central de este informe. En lo que sigue, presentamos los principios básicos y las propiedades físicas relacionadas con las ecuaciones cinéticas fraccionales. Mostramos que las ecuaciones fraccionales surgen naturalmente en el límite de difusión de ciertos esquemas de caminata aleatoria. Al analizar los métodos de solución y derivar soluciones explícitas, demostramos la utilidad del enfoque fraccional. Al principio, presentamos los FDE que se basan en el modelo de caminata aleatoria de tiempo continuo en el que los eventos de transporte están sujetos a estadísticas amplias. Posteriormente, se presentan los FDAE y los FFPE y describen el transporte en un campo de fuerza o fuerza externo. En la sección final, se discute una derivación física sobre la base de una ecuación de Langevin con ruido gaussiano blanco que conduce a una ecuación de Klein-Kramers fraccional. De esta última, el FFPE se recupera constantemente. En los Apéndices hemos compilado algunas definiciones básicas y relaciones útiles que son de relevancia en el texto principal. Por lo tanto, le damos una introducción al cálculo fraccional y las funciones especiales que surgen cuando se trata de ecuaciones diferenciales fraccionales, así como una breve introducción a las leyes de Lévy. Por último, enumeramos las abreviaturas y Notación utilizada. Tenga en cuenta que a lo largo del texto denotamos las transformadas de Laplace y Fourier de una función al indicar la dependencia explícita de la variable asociada, por ejemplo $W(k, u) = \mathfrak{F}\{\mathcal{L}\{W(x, t); t \rightarrow u\}; x \rightarrow k\}$.

Las numerosas ilustraciones repartidas a lo largo del texto son para visualizar las diferencias a menudo sorprendentes en el comportamiento funcional de los casos normales y anómalos, especialmente la perseverancia de la condición inicial en el dominio subdifusivo. La discusión en el resto de este informe se limita al caso unidimensional, con especial énfasis en los fenómenos de subdifusión. Las ecuaciones que describen la subdifusión presentada en el texto se pueden extender a dimensiones más altas mediante el reemplazo de las derivadas con respecto a la coordenada de posición por los órdenes correspondientes del operador ∇ . Algunas observaciones sobre sistemas de dimensiones superiores están contenidas en la Ref. [215]. Para aquellas ecuaciones que describen situaciones con longitudes de salto distribuidas Lévy y que, por lo tanto, contienen un laplaciano generalizado, nos referimos a las definiciones en la Ref. [226] y las discusiones en las refs. [156-158] para el caso multidimensional.

De las caminatas aleatorias de tiempo continuo a las ecuaciones de difusión fraccionales

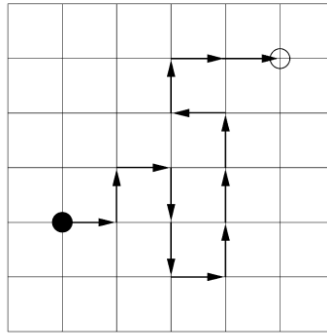


Fig. 4. Schematic representation of a Brownian random walk. The walker jumps at each time step $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t, \dots$ to a randomly selected direction, thereby covering the distance Δx , the lattice constant.

Figure 4: This is a captio

En nuestra búsqueda de establecer la ecuación de división fraccionaria (FDE), tomamos prestadas las ideas de conectar el enfoque de caminata aleatoria con la descripción continua a través de la ecuación de difusión,

y comenzamos con el esquema de caminata aleatoria de tiempo continuo. Este último es lo suficientemente flexible para explicar el rico panel de tiempos de transporte encontrados en sistemas complejos. Después de establecer el marco fundamental de caminatas aleatorias y recuperar la ecuación de difusión estándar, pasamos a la discusión del marco de caminatas aleatorias de tiempo continuo y la derivación del FDE. Esta ecuación se mostrará para permitir una investigación de fenómenos subdifusivos, y los vuelos de Lévy con las herramientas bien conocidas para tratar la ecuación de difusión estándar.

Revisando el dominio del movimiento browniano

En la Fig. 4 se muestra esquemáticamente una caminata típica Browniana, como los datos originales de Perrin, en una red bidimensional. En pasos de tiempo discretos de saltos Δt , se supone que la partícula de prueba salta a uno de los sitios vecinos más cercanos, que se muestra aquí en un cuadrado red con constante de red Δx , la dirección es aleatoria. Tal proceso puede ser modelado por la ecuación maestra

$$W_j(t + \Delta t) = \frac{1}{2}W_{j-1}(t) + \frac{1}{2}W_{j+1}(t) \quad (10)$$

en el análogo unidimensional, ya que el proceso es local tanto en el espacio como en el tiempo. En la ec. (10), el índice denota la posición en la red unidimensional subyacente. Ec. (10) define la pdf para estar en la posición j en el tiempo $t + \Delta t$ en función de la población de los dos sitios adyacentes $j \pm 1$ en el tiempo t . El prefactor $1/2$ expresa la dirección de isotropía de los saltos. En los límites continuos $\Delta t \rightarrow 0$ y $\Delta x \rightarrow 0$, las expansiones de Taylor en Δt y Δx cumplen,

$$W_j(t + \Delta t) = W_j(t) + \Delta t \frac{\partial W_j}{\partial t} + \mathbf{O}([\Delta t]^2) \quad (11)$$

y

$$W_{j\pm 1}(t) = W(x, t) \pm \Delta x \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mathbf{O}([\Delta x]^3) \quad (12)$$

conduce a la ecuación de difusión

$$\frac{\partial W}{\partial t} = K_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} W(x, t), \quad (13)$$

al tomar los órdenes más bajos en Δt y Δx . Por lo tanto, el límite de continuidad debe trazarse de modo que el cociente

$$K_1 \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \quad (14)$$

es finito. K_1 se denomina la constante de difusión y es de dimensión $[K_1] = cm^2s^{-1}$. La ecuación de difusión (13) es una de las ecuaciones más fundamentales en física, siendo una consecuencia directa del teorema del límite central [27,42,58]. Bajo la condición de que los primeros dos momentos de la pdf, describan la distancia adecuadamente normalizada cubierta en un evento de salto y la varianza, $\bar{X} = \sum_i X_i$ y $\bar{X}^2$, así como el intervalo de tiempo medio Δt entre dos eventos de salto individuales, existe, el teorema del límite central asegura que el proceso de caminata aleatoria se caracteriza por una velocidad media $V = \bar{X}/\Delta t$ y un coeficiente de difusión $K = (2\Delta t)^{-1}[\bar{X}^2 - \bar{X}^2]$ [27,42]. Además, para tiempos largos, es decir, un número

suficientemente grande de pasos, la pdf de estar en una posición determinada x en el tiempo t , se rige por la ecuación de difusión (13), y está dado por la forma gaussiana

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi K_1 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4K_1 t}\right) \quad (15)$$

$W(x, t)$ de la ec. (15) se denomina propagador, es decir, la solución de la ecuación de difusión (13) para la condición inicial aguda $W_0(x) \equiv \lim_{t \rightarrow 0^+} W(x, t) = \delta(x)$. Los modos individuales de la ecuación (13) decaimiento exponencialmente en el tiempo,

$$W(x, t) = \exp(-K_1 k^2 t) \quad (16)$$

con la ecuación transformada de Fourier,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -K_1 k^2 W(x, t), \quad (17)$$

siendo una ecuación de relajación, para un número de referencia fijo k .

El modelo de caminata aleatoria de tiempo continuo

Para las generalizaciones de transporte anómalo, elegimos el esquema de caminata aleatoria de tiempo continuo (CTRW) como punto de partida. En paralelo al enfoque dual y complementario en el problema de la difusión estándar, desarrollaremos una ecuación de difusión generalizada de orden fraccional sobre la base del CTRW.

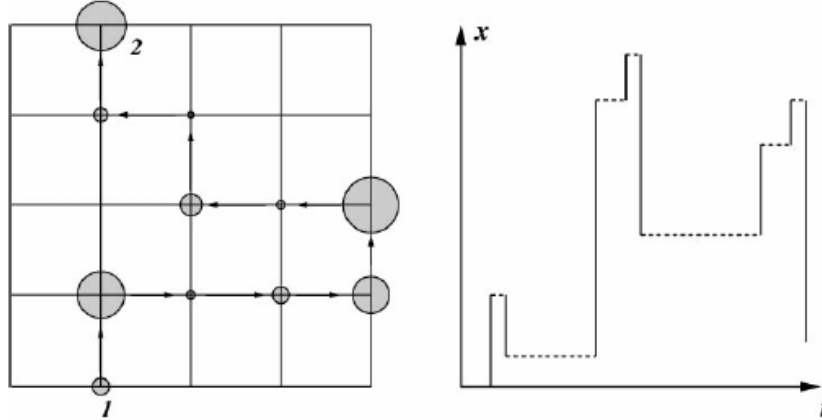


Figure 5: Fig. 5. Modelo de caminata aleatoria de tiempo continuo (CTRW). Izquierda: proceso de CTRW en una red bidimensional, que generaliza la situación browniana de la Fig. 4. Los tiempos de espera están simbolizados por los círculos de espera, el diámetro de cada uno es proporcional al tiempo de espera que se debe gastar en un sitio determinado antes de que se produce el siguiente evento de salto. Las longitudes de salto siguen siendo equidistantes. A la derecha: El diagrama (x, t) de un proceso de CTRW unidimensional en el que tanto las longitudes de salto como los tiempos de espera se extraen de PDF que permiten una amplia variación de las variables aleatorias correspondientes.

El modelo CTRW se basa en la idea de que la longitud de un salto dado, así como el tiempo de espera que transcurre entre dos saltos sucesivos, se extraen de una pdf $\psi(x, t)$ que se conocerá como el salto pdf. Desde $\psi(x, t)$, la longitud de salto pdf

$$\lambda(x) = \int_0^\infty \psi(x, t) dt \quad (18)$$

y el tiempo de espera en pdf

$$w(x) = \int_{-\infty}^\infty \psi(x, t) dx \quad (19)$$

se puede deducir. Por lo tanto, $\lambda(x)dx$ produce la probabilidad de una longitud de salto en el intervalo $(x, x + dx)$ y $w(t)dt$ la probabilidad de un tiempo de espera en el intervalo $(t, t + dt)$. Si la longitud del salto y el tiempo de espera son variables aleatorias independientes, se encuentra la forma desacoplada $\psi(x, t) = w(t)\lambda(x)$ para el salto pdf $\psi(x, t)$. Si ambos están acoplados, es decir, $\psi(x, t) = p(x|t)w(t)$ o $\psi(x, t) = p(t|x)\lambda(x)$, un salto de cierta longitud implica un costo de tiempo o, viceversa; es decir, en un lapso de tiempo dado, el caminante solo puede recorrer una distancia máxima. En lo que sigue, empleamos la versión desacoplada. En la Fig. 5 se dibuja un esquema del modelo CTRW. Los diferentes tipos de procesos CTRW se pueden clasificar por el tiempo de espera característico

$$T = \int_0^\infty w(t)t dt \quad (20)$$

y la varianza de longitud de salto

$$\Sigma = \int_0^\infty \lambda(x)x^2 dx \quad (21)$$

siendo finito o divergente, respectivamente. Con estas definiciones, un proceso CTRW se puede describir mediante una ecuación maestra generalizada apropiada [150,151,164,166,167], a través de un conjunto de ecuaciones de Langevin [159,160,216,217], o por la ecuación [151]

$$\eta(x, t) = \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \eta(x', t')\psi(x - x', t - t') dt' dx' + \delta(x)\delta(t) \quad (22)$$

que relaciona la pdf $\eta(x, t)$ de haber llegado a la posición x en el tiempo t , con el evento que acaba de llegar a x' en el tiempo t' , $\eta(x', t')$. El segundo sumando en la ec. (22) denota la condición inicial de la caminata aleatoria, aquí elegida para ser $\delta(x)$. En consecuencia, la pdf $W(x, t)$ de estar en x en el momento t está dado por

$$W(x, t) = \int_0^t \eta(x, t')\Psi(t - t') dt \quad (23)$$

es decir, de la llegada a ese sitio en el momento t' , y no haberse movido desde entonces. Este último se está definiendo por la probabilidad acumulada

$$\Psi(t) = 1 - \int_0^t w(t') dt' \quad (24)$$

asignado a la probabilidad de que no haya ningún evento de salto durante el intervalo de tiempo $(0, t)$. En el espacio de Fourier-Laplace, la pdf $W(x, t)$ obedece a la relación algebraica [151]

$$W(k, u) = \frac{1 - w(u)}{u} \frac{W_0(k)}{1 - \psi(k, u)} \quad (25)$$

donde $W_0(k)$ denota la transformada de Fourier de la condición inicial $W_0(x)$.

Regresando al movimiento browniano

Considere ahora diferentes casos del modelo CTRW definido a través de la pdf de salto desacoplado $\psi(x, t) = w(t)\lambda(x)$. Si tanto el tiempo de espera característico como la variación de la longitud del salto, T y Σ^2 , son finitos, el límite a largo plazo corresponde al movimiento browniano. Consideremos, por ejemplo, una pdf de tiempo de espera de Poisson $w(t) = \tau^{-1} \exp(-t/\tau)$ con $T = \tau$, junto con una pdf de longitud de salto gaussiana $\lambda(x) = (4\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp(-x^2/(4\sigma^2))$ que lleva a $\Sigma^2 = 2\sigma^2$. Entonces, las transformadas de Laplace y Fourier correspondientes son de la forma

$$w(u) \sim 1 - u\tau + \mathbf{O}(\tau^2) \quad (26)$$

$$\lambda(k) \sim 1 - \sigma^2 k^2 + \mathbf{O}(k^2) \quad (27)$$

De hecho, cualquier par de pdf que conduzca a T y Σ^2 finitos, conducen al mismo resultado, a órdenes más bajos y, por lo tanto, en el límite de tiempo largo [151]. Reemplazando las ecs. (26) y (27) en la ec. (25), se recupera fácilmente, para la condición inicial $W_0(x) = \delta(x)$, la transformada de espacio de Fourier-Laplace del propagador,

$$W(k, u) = \frac{1}{u + K_1 k^2} \quad (28)$$

con $K_1 \equiv \sigma^2/\tau$. Las transformadas a posteriori en coordenadas (x, t) , esto no es más que el conocido propagador gaussiano en la ecuación. (15). Después de la multiplicación con el denominador en la ec. (28), y haciendo uso de los teoremas de la transformada de Fourier para la diferenciación (i.e, $\mathfrak{F}\{\partial^2 W(x, t)/\partial x^2\} = -k^2 W(k, t)$) y la transformada de Laplace (i.e, $\mathfrak{F}\{\partial W(x, t)/\partial t\} = uW(x, u) - W_0(x)$), la segunda ley de Fick (13) se obtiene de inmediato. Tenga en cuenta que la noción de tiempo largo, equivalente al límite de difusión, solo es relativa con respecto a la escala de tiempo τ . En el espacio de Fourier-Laplace, el límite de difusión se da a través del supuesto de $(k, u) \rightarrow (0, 0)$ [150,223,227,228].

Descanso largo: una ecuación fraccional de difusión que describe la subdifusión

Considere la siguiente situación, que a veces se denomina caminata aleatoria de tiempo fractal [43][101], donde el tiempo de espera característico T diverge, pero la variación de la longitud de salto Σ^2 aún se mantiene finita. Con este fin, una pdf de tiempo de espera de cola larga con el comportamiento asintótico [83-85]

$$w(t) \sim A_\alpha (\tau/t)^{1+\alpha}, \quad (29)$$

Para $0 < \alpha < 1$, el cual tiene las correspondientes asíntotas del espacio de Laplace [83-85,151,229-230]¹²

$$w(t) \sim 1 - (u\tau)^\alpha. \quad (30)$$

De nuevo, la forma específica de $w(t)$ es de menor importancia. En consecuencia, junto con la pdf de longitud de salto gaussiano caracterizado a través de la ec (27), la pdf en el espacio de Fourier-Laplace se convierte en

$$W(k, u) = \frac{[W_0(k)/u]}{1 + K_\alpha u^{-\alpha} k^2} \quad (31)$$

en el límite de difusión $(k, u) \rightarrow (0, 0)$. Empleando la regla de integración para integrales fraccionales [54]; [55]; [56]; [57]; [58][226,232],

$$\mathfrak{L}\{ {}_0D_t^{-p} W(x, t) \} = u^{-p} W(x, u), p \geq 0, \quad (32)$$

de donde se infiere la ecuación integral fraccional

$$W(x, t) - W_0(x) = {}_0D_t^{-\alpha} K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, t) \quad (33)$$

De la relación (31). Por aplicación del operador diferencial $\partial/\partial t$, se llega finalmente a la FDE

$$\frac{\partial W}{\partial t} = {}_0D_t^{1-\alpha} K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, t). \quad (34)$$

El operador Riemann-Liouville ${}_0D_t^{1-\alpha} = (\partial/\partial t){}_0D_t^{-\alpha}$, para $0 < \alpha < 1$, se define a través de la relación [226,232-235]

$${}_0D_t^{1-\alpha} W(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{W(x, t')}{(t - t')^{1-\alpha}} dt' \quad (35)$$

Su propiedad fundamental es la diferenciación de orden fraccional de una potencia.

$${}_0D_t^{1-\alpha} t^p = \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(\alpha+p)} t^{p+\alpha-1}. \quad (36)$$

De hecho, se puede escribir la relación más general

$${}_0D_t^q t^p = \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+p-q)} t^{p-q} \quad (37)$$

para cualquier real q . Especialmente, la diferenciación fraccional de Riemann-Liouville de una constante se convierte en

$${}_0D_t^q 1 = \frac{1}{\Gamma(1-q)} t^{-q}. \quad (38)$$

¹²Tenga en cuenta que $\psi(u=0)$, es decir, $\lim_{u \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-ut} \psi(t) dt$ no es más que la normalización de la pdf tiempo de espera, es decir, $\psi(u=0) = 1$.

Los casos especiales de diferenciación de orden entero de una constante, $d^n 1/dt^n = 0$, se incluyen a través de los polos de la función Gamma para $q = 1, 2, \dots$. En el Apéndice A se ofrece una introducción más detallada de la diferenciación fraccional.

Por lo tanto, la naturaleza integradora del operador fraccional de Riemann-Liouville ${}_0D_t^{1-\alpha}$ de acuerdo con la ec. (35), con el núcleo integral $M(t) \propto t^{\alpha-1}$, garantiza la naturaleza no markoviana del proceso subdifusivo definido por el FDE (34). De hecho, al calcular el desplazamiento cuadrático medio de la relación (31) a través de relación $\langle x^2 \rangle = \lim_{k \rightarrow 0} \{(-d^2/dk^2)W(k, u)\}$ y posterior inversión de Laplace, el resultado

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2K_\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha \quad (39)$$

es obtenido. Alternativamente, se puede inferir de la FDE (34) mediante la integración sobre $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx$, lo que lleva a $(d/dt)\langle x^2 \rangle = {}_0D_t^{1-\alpha} 2K_\alpha = 2K_\alpha t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$. Reescribiendo la FDE (34) en la forma equivalente

$${}_0D_t^\alpha W - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} W_0(x) = K_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, t), \quad (40)$$

el valor inicial $W_0(x)$ se ve decaído con la forma de ley de potencia inversa $(t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha))W_0(x)$, y no es exponencialmente rápido como para la difusión estándar [215]. Tenga en cuenta que en el límite $\alpha \rightarrow 1$, la FDE (34) se reduce a la segunda ley de Fick, como debería. La constante de difusión generalizada K_α que aparece en el FDE (34), está definida por

$$K_\alpha \equiv \sigma^2/\tau^\alpha \quad (41)$$

en términos de las escalas σ y τ , que llevan a la dimensión $[K_\alpha] = cm^2 s^{-\alpha}$. El FDE (34) se consideró primero en la forma integral (33) por Schneider y Wyss [175]. Se consideró una forma equivalente por Balakrishnan [173], y una forma diferencial por Wyss [174].

Se puede encontrar una solución de forma cerrada para la FDE (34) en términos de funciones de Fox, y el resultado es

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi K_\alpha t^\alpha}} H_{1,2}^{2,0} \left[\frac{x^2}{4K_\alpha t^\alpha} \middle| \begin{matrix} (1-\alpha/2, \alpha) \\ (0, 1), (\frac{1}{2}, 1) \end{matrix} \right] \quad (42)$$

Introduciendo a la función Fox $H_{1,2}^{2,0}$. La función de Fox se define en el Apéndice. Tenga en cuenta que el resultado (42) se puede reescribir en la forma alternativa

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4K_\alpha t^\alpha}} H_{1,1}^{1,0} \left[\frac{|x|}{\sqrt{K_\alpha t^\alpha}} \middle| \begin{matrix} (1-\alpha/2, \alpha/2) \\ (0, 1) \end{matrix} \right] \quad (43)$$

empleando la definición de la función de Fox y la regla de duplicación de la función Gamma [236].

Debido a la aparición de potencias no enteras de la variable de Laplace u en la expresión para $W(k, u)$, en la ec. (31), no se presenta una inversión directa de Laplace. Existen tres métodos básicos para calcular la inversión: (i) Primero aplicada por Wyss [174], y Schneider y Wyss [175], la técnica de Mellin puede superar este problema por el camino indirecto a través del espacio de Mellin. De este modo, la integral de trayectoria que define la inversión de Mellin tiene una estructura similar a la definición de las funciones de Fox, la ec. (B.8), para que el resultado pueda inferirse directamente de su transformada de Mellin. (ii) Uno puede identificar la expresión para $W(k, u)$, Eq. (31), con su función de Fox correspondiente, y luego use las reglas existentes para que las funciones de Fox calculen las inversiones de Laplace y de Fourier, consulte Refs.

[180,237]. El resultado es nuevamente una función de Fox, que puede simplificarse mediante reglas estándar, para obtener los resultados anteriores. (iii) Se puede primero invertir Fourier sobre $W(k, u)$, para obtener

$$W(x, u) = \frac{1}{2} u^{\alpha/2-1} \exp\left(-|x|u^{\alpha/2}\right), \quad (44)$$

expanda la función exponencial en su serie de Taylor, e invierta término por término, usando la regla (37). El resultado final es una serie de potencias, que puede mostrarse como idéntica a la expresión (43) [215]. Sin la identificación como una función de Fox, la serie obtenida no presenta ninguna información directa sobre los asintóticos exponenciales estirados (45) derivados a continuación de las propiedades estándar de la función de Fox. Empleando algunos teoremas estándar de la función de Fox, se puede derivar el comportamiento gaussiano asintótico extendido

$$W(x, t) \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi K_\alpha t^\alpha}} \sqrt{\frac{1}{2-\alpha}} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{(1-\alpha)/(2-\alpha)} \left(\frac{|x|}{\sqrt{K_\alpha t^\alpha}}\right)^{-(1-\alpha)/(2-\alpha)} \quad (45)$$

$$\times \exp\left(-\frac{2-\alpha}{2} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\alpha/(2-\alpha)} \left(\frac{|x|}{\sqrt{K_\alpha t^\alpha}}\right)^{1/(1-\alpha/2)}\right) \quad (46)$$

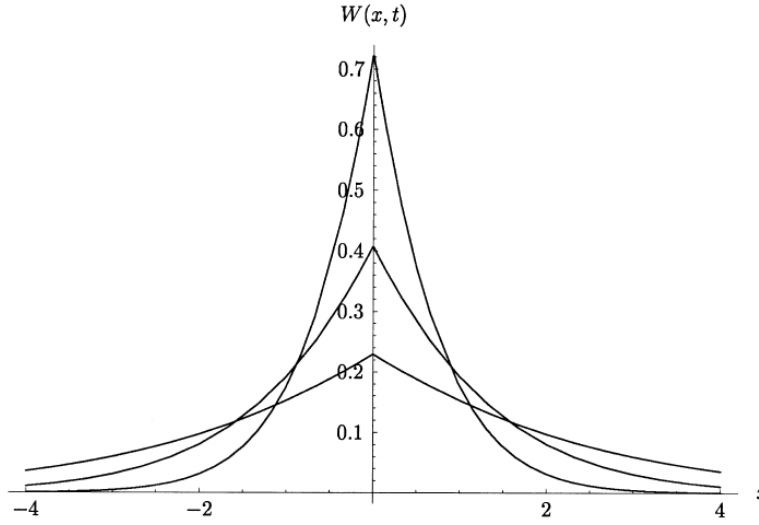


Figure 6: This is a caption

válido $|x| \gg \sqrt{K_\alpha t^\alpha}$. La forma funcional del resultado (45) es equivalente a los hallazgos de CTRW informados por Zumofen y Klafter [238,239], ver Eq. (9). Además, $W(x, t)$ se puede representar a través de la expansión de la serie

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4K_\alpha t^{\alpha/2}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(1 - \alpha[n+1]/2)} \left(\frac{x^2}{K_\alpha t^\alpha}\right)^{n/2} \quad (47)$$

en forma computable. Si α es un número racional, la función de Fox en las ecuaciones (42) y (43) se pueden simplificar. Por lo tanto, para un $\alpha = 1/2$, se puede reescribir en términos de la G-función de Meijer

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^2 K_{1/2} t^{1/2}}} H_{0,2}^{2,0} \left[\frac{x^2}{8K_{1/2} t^{1/2}} \middle| \begin{matrix} - & - & - & - & - & - & - \\ (0, 1), (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] \quad (48)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8\pi^3 K_{1/2} t^{1/2}}} H_{0,3}^{3,0} \left[\left(\frac{x^2}{116K_{1/2} t^{1/2}} \right)^2 \middle| \begin{matrix} - & - & - & - & - & - \\ (0, 1), (\frac{1}{4}, 1), (\frac{1}{2}, 1) \end{matrix} \right] \quad (49)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8\pi^3 K_{1/2} t^{1/2}}} G_{0,3}^{3,0} \left[\left(\frac{x^2}{116K_{1/2} t^{1/2}} \right)^2 \middle| \begin{matrix} - & - & - & - & - & - \\ 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \end{matrix} \right] \quad (50)$$

utilizando dos veces la fórmula de duplicación de la función Gamma [236] en la integral de tipo Mellin-Barnes, Eq. (B.8), definiendo la función de Fox [237,240-243]. Esta representación es útil, ya que la función G de Meijer pertenece a las funciones especiales implementadas de Mathematica [244], siendo la notación

$$\frac{1}{\sqrt{8\pi^3 t^{1/2}}} G_{0,3}^{3,0} \left[\left(\frac{x^2}{16t^{1/2}} \right)^2 \middle| \begin{matrix} - & - & - & - & - & - \\ 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \end{matrix} \right] \quad (51)$$

$$= 1/(8 \text{Pi} \wedge 3 \text{t} \wedge (1/2)) * \\ \text{MeijerG}[\{\{\}, \{\}\}, \{\{0, 1/4, 1/2\}, \{\}\}, x \wedge 4/(16 \wedge 2 \text{t})] .$$

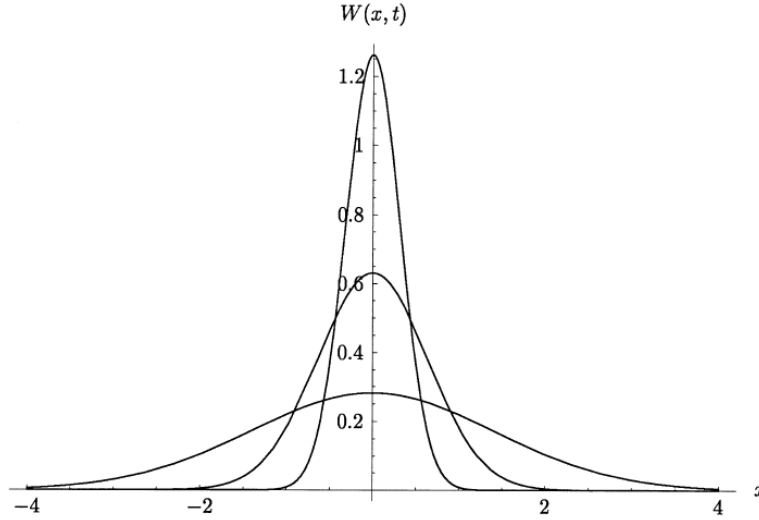


Figure 7: Fig. 7.el Propagador $W(x, t)$ para difusión browniana $(\alpha=1)$ para los tiempos $t=0.05$, 0.2 y 1 . La forma mucho más suave cerca del origen distingue esta solución de la contraparte subdifusiva dibujada en la Fig. 6.

Apéndice

References

- [1]N. Goldenfeld, Simple Lessons from Complexity, Science. 284 (1999) 87–89. doi:10.1126/science.284.5411.87.
- [2]L. Peliti, A. Vulpiani, eds., Measures of Complexity, Springer Berlin Heidelberg, 1988. doi:10.1007/3-540-50316-1.
- [3]R. Benzi, L. Peliti, A. Vulpiani, Fractal dimensions and $1/f$ noise, Lettere Al Nuovo Cimento. 36 (1983) 471–474. doi:10.1007/bf02817986.
- [4]H. Takayama, ed., Cooperative Dynamics in Complex Physical Systems, Springer Berlin Heidelberg, 1989. doi:10.1007/978-3-642-74554-6.
- [5]Isomere Modificationen der Valeriansäure, Archiv Der Pharmazie. 185 (1868) 128–129. doi:10.1002/ardp.18681850145.
- [6]P. Debye, “Polymers and Light”, Transactions of the New York Academy of Sciences. 7 (1945) 77–86. doi:10.1111/j.2164-0947.1945.tb00183.x.
- [7]K. Kromphardt, W. Witschel, H. Weber, E. Wölfel, J.F. Kalthoff, H.J. Fahr, K. Kraus, Lenk Gellert: Fachlexikon ABC Physik/Falkenhagen: Theorie der Elektrolyte/Barnes: Laser Theory/Wallace: Thermodynamics of Crystals/Englman: The Jahn-Teller Effect in Molecules and Crystals/Nowacki: Progress in Thermoelectricity/Moulton: An Introduction to, Physik Journal. 30 (1974) 189–191. doi:10.1002/phbl.19740300413.
- [8]S. Dattagupta, COMMON RELAXATION PHENOMENA: DIFFERENT TECHNIQUES, in: Relaxation Phenomena in Condensed Matter Physics, Elsevier, 1987: pp. 63–76. doi:10.1016/b978-0-12-203610-1.50012-6.
- [9]W. Bergthaller, Autorenkollektiv: Rheologie von Lebensmittelmassen (Übersetzung aus dem Russischen). VEB Fachbuchverlag Leipzig 1975. 274 Seiten, mit 62 Abb. u. 57 Tab. Pappeinband M 22,–, Starch - Stärke. 28 (1976) 186–186. doi:10.1002/star.19760280516.
- [10]N.W. Tschoegl, Linear Viscoelastic Response, in: The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior, Springer Berlin Heidelberg, 1989: pp. 35–68. doi:10.1007/978-3-642-73602-5₂.
- [11]R. Kohlrausch, Ueber das Dellmann'sche Elektrometer, Annalen Der Physik Und Chemie. 148 (1847) 353–405. doi:10.1002/andp.18471481102.
- [12]G. Williams, D.C. Watts, Non-symmetrical dielectric relaxation behaviour arising from a simple empirical decay function, Transactions of the Faraday Society. 66 (1970) 80. doi:10.1039/tf9706600080.
- [13]J. Klafter, M.F. Shlesinger, On the relationship among three theories of relaxation in disordered systems, Proceedings of the National Academy of Sciences. 83 (1986) 848–851. doi:10.1073/pnas.83.4.848.
- [14]A. Blumen, J. Klafter, G. Zumofen, Models for Reaction Dynamics in Glasses, in: Physic and Chemistry of Materials with Low-Dimensional Structures, Springer Netherlands, 1986: pp. 199–265. doi:10.1007/978-94-009-4650-7₅.
- [15]M.O. Vlad, R. Metzler, T.F. Nonnenmacher, M.C. Mackey, Universality classes for asymptotic behavior of relaxation processes in systems with dynamical disorder: Dynamical generalizations of stretched exponential, Journal of Mathematical Physics. 37 (1996) 2279–2306. doi:10.1063/1.531509.
- [16]F.J.V. Antwerpen, Detergent Properties of Ether Sulfonates, Industrial & Engineering Chemistry. 31 (1939) 64–69. doi:10.1021/ie50349a014.

- [17]G.W.S. Blair, Ueber die Geschwindigkeitsfunktion der Viskosität disperser Systeme, *Kolloid-Zeitschrift*. 47 (1929) 76–81. doi:10.1007/bf01423143.
- [18]G.W.S. Blair, 203. An apparatus for measuring the elastic and plastic properties of cheese curd, *Journal of Dairy Research*. 9 (1938) 347. doi:10.1017/s0022029900002624.
- [19]G.W.S.C.O.T.T. BLAIR, A New Criterion for Expressing the ‘Intensity of Firmness’ of Soft Bodies, *Nature*. 152 (1943) 412–412. doi:10.1038/152412a0.
- [20]W.G. Glöckle, T.F. Nonnenmacher, Fractional integral operators and Fox functions in the theory of viscoelasticity, *Macromolecules*. 24 (1991) 6426–6434. doi:10.1021/ma00024a009.
- [21]W.G. Glöckle, T.F. Nonnenmacher, Fractional relaxation and the time-temperature superposition principle, *Rheologica Acta*. 33 (1994) 337–343. doi:10.1007/bf00366960.
- [22]W.G. Glöckle, T.F. Nonnenmacher, A fractional calculus approach to self-similar protein dynamics, *Biophysical Journal*. 68 (1995) 46–53. doi:10.1016/s0006-3495(95)80157-8.
- [23]J. Topping, Investigations on the Theory of the Brownian Movement, *Physics Bulletin*. 7 (1956) 281–281. doi:10.1088/0031-9112/7/10/012.
- [24]Erratum, *Physics Bulletin*. 34 (1983) 363–363. doi:10.1088/0031-9112/34/9/006.
- [25]G.H. Weiss, Random walks and random environments volume 1: Random walks, *Journal of Statistical Physics*. 82 (1996) 1675–1677. doi:10.1007/bf02183400.
- [26]S. Benkadda, G.M. Zaslavsky, eds., *Chaos Kinetics and Nonlinear Dynamics in Fluids and Plasmas*, Springer Berlin Heidelberg, 1998. doi:10.1007/bfb0106949.
- [27]J.P. Bouchaud, A. Georges, Comment on “Stochastic pathway to anomalous diffusion”, *Physical Review A*. 41 (1990) 1156–1157. doi:10.1103/physreva.41.1156.
- [28]B.J. West, W. Deering, Fractal physiology for physicists: Lévy statistics, *Physics Reports*. 246 (1994) 1–100. doi:10.1016/0370-1573(94)00055-7.
- [29]Industrie des Cuirs et des Peaux Analyse des Matieres Premieres, des Agents Auxiliaries et des Products. Par Ferdinand Jean. Paris, Gauthier-Villars et Fils. 195 P., 1893. Fabrication des Vernis, Application a l'Induustrie et aux Arts. Par Aurent Naudin. Paris, Gauthier-Villars et Fils. 200 p., 1893. Decoration Ceramique au Feu de Moufle. Par M. E. Guenez. Paris, Gauthier-Villars et Fils, Quai des Grands-Augustines, 55. 199 p., 1893, Science. (1893) 362–363. doi:10.1126/science.ns-22.569.362-a.
- [30]H. Wold, B.V. Gnedenko, A.N. Kolmogorov, Limit Distributions for Sums of Independent Variables, *Econometrica*. 23 (1955) 455. doi:10.2307/1905355.
- [31]H. Scher, E.W. Montroll, Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids, *Physical Review B*. 12 (1975) 2455–2477. doi:10.1103/physrevb.12.2455.
- [32]E.W. Montroll, Theory of Nonlinear Processes, Defense Technical Information Center, 1975. doi:10.21236/ada019097.
- [33]M.M. Perlman, S. Bamji, Applicability of the Scher-Montroll model to transient photocurrent and surface potential decay in insulators, *Applied Physics Letters*. 33 (1978) 581–583. doi:10.1063/1.90467.
- [34]E.W. Montroll, H. Scher, Random walks on lattices. IV. Continuous-time walks and influence of absorbing boundaries, *Journal of Statistical Physics*. 9 (1973) 101–135. doi:10.1007/bf01016843.
- [35]U. Landman, E.W. Montroll, M.F. Shlesinger, Motion of Clusters on Surfaces, *Physical Review Letters*. 38 (1977) 285–289. doi:10.1103/physrevlett.38.285.

- [36]A. Lőrincz, F. Beleznyay, Infrared divergence and Scher-Montroll model for transient electrical transport in amorphous semiconductors, *Solid State Communications*. 44 (1982) 109–111. doi:10.1016/0038-1098(82)90411-2.
- [37]H. Krüsemann, R. Schwarzl, R. Metzler, Ageing Scher–Montroll Transport, *Transport in Porous Media*. 115 (2016) 327–344. doi:10.1007/s11242-016-0686-y.
- [38]G. Pfister, H. Scher, Time-dependent electrical transport in amorphous solids:As₂Se₃, *Physical Review B*. 15 (1977) 2062–2083. doi:10.1103/physrevb.15.2062.
- [39]G. Pfister, H. Scher, Dispersive (non-Gaussian) transient transport in disordered solids, *Advances in Physics*. 27 (1978) 747–798. doi:10.1080/00018737800101474.
- [40]G. Zumofen, A. Blumen, J. Klafter, Current flow under anomalous-diffusion conditions: Lévy walks, *Physical Review A*. 41 (1990) 4558–4561. doi:10.1103/physreva.41.4558.
- [41]P.W.M. Blom, M.C.J.M. Vissenberg, Dispersive Hole Transport in Poly(p-Phenylene Vinylene), *Physical Review Letters*. 80 (1998) 3819–3822. doi:10.1103/physrevlett.80.3819.
- [42]M.F. Shlesinger, Asymptotic solutions of continuous-time random walks, *Journal of Statistical Physics*. 10 (1974) 421–434. doi:10.1007/bf01008803.
- [43]H. Scher, M.F. Shlesinger, J.T. Bendler, Time-Scale Invariance in Transport and Relaxation, *Physics Today*. 44 (1991) 26–34. doi:10.1063/1.881289.
- [44]Q. Gu, E.A. Schiff, S. Grebner, F. Wang, R. Schwarz, Non-Gaussian Transport Measurements and the Einstein Relation in Amorphous Silicon, *Physical Review Letters*. 76 (1996) 3196–3199. doi:10.1103/physrevlett.76.3196.
- [45]B. Rinn, W. Dieterich, P. Maass, Stochastic modelling of ion dynamics in complex systems: Dipolar effects, *Philosophical Magazine B*. 77 (1998) 1283–1292. doi:10.1080/13642819808205021.
- [46]S. Havlin, D. Movshovitz, B. Trus, G.H. Weiss, Probability densities for the displacement of random walks on percolation clusters, *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 18 (1985) L719–L722. doi:10.1088/0305-4470/18/12/006.
- [47]M. Porto, A. Bunde, S. Havlin, H.E. Roman, Structural and dynamical properties of the percolation backbone in two and three dimensions, *Physical Review E*. 56 (1997) 1667–1675. doi:10.1103/physreve.56.1667.
- [48]V. Balakrishnan, Anomalous diffusion in one dimension, *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*. 132 (1985) 569–580. doi:10.1016/0378-4371(85)90028-7.
- [49]W. Wyss, The fractional diffusion equation, *Journal of Mathematical Physics*. 27 (1986) 2782–2785. doi:10.1063/1.527251.
- [50]W.R. Schneider, W. Wyss, Fractional diffusion and wave equations, *Journal of Mathematical Physics*. 30 (1989) 134–144. doi:10.1063/1.528578.
- [51]B. O'Shaughnessy, I. Procaccia, Analytical Solutions for Diffusion on Fractal Objects, *Physical Review Letters*. 54 (1985) 455–458. doi:10.1103/physrevlett.54.455.
- [52]R.A. Guyer, Diffusion on the Sierpiński gaskets: A random walker on a fractally structured object, *Physical Review A*. 29 (1984) 2751–2755. doi:10.1103/physreva.29.2751.
- [53]J. Klafter, G. Zumofen, A. Blumen, On the propagator of Sierpinski gaskets, *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 24 (1991) 4835–4842. doi:10.1088/0305-4470/24/20/016.
- [54]H. Rafeiro, S. Samko, Fractional integrals and derivatives: mapping properties, *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 19 (2016). doi:10.1515/fca-2016-0032.

- [55]N. Samko, S. Samko, B. Vakulov, Fractional integrals and hypersingular integrals in variable order Hölder spaces on homogeneous spaces, *Journal of Function Spaces and Applications*. 8 (2010) 215–244. doi:10.1155/2010/659456.
- [56]S. Samko, S. Umarchadzhiev, Riesz fractional integrals in grand lebesgue spaces on $\{BbbR^n$, *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 19 (2016). doi:10.1515/fca-2016-0033.
- [57]Fractional Derivatives and Integrals, in: *Mathematics in Science and Engineering*, Elsevier, 1999: pp. 41–119. doi:10.1016/s0076-5392(99)80021-6.
- [58]Chapter 3: Fractional Derivatives and Integrals: Definitions and Equivalences, in: *The Fractional Calculus - Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Elsevier, 1974: pp. 45–60. doi:10.1016/s0076-5392(09)60225-3.
- [59]B. Bugenhagen, N.A. Soom, Y.A. Jasem, T. Thiemann, Crystal structure of (1Z,2E)-cinnamaldehyde oxime, *Acta Crystallographica Section E Crystallographic Communications*. 71 (2015) o1063–o1064. doi:10.1107/s2056989015023853.
- [60]A. Tofighi, The intrinsic damping of the fractional oscillator, *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*. 329 (2003) 29–34. doi:10.1016/s0378-4371(03)00598-3.
- [61]N. Wax, M.H. Cohen, *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, *Physics Today*. 8 (1955) 19–19. doi:10.1063/1.3062012.
- [62]F. Smithies, H.S. Carslaw, J.C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, *The Mathematical Gazette*. 36 (1952) 142. doi:10.2307/3610347.
- [63]J.L. Doob, Review: Edward Nelson Dynamical Theories of Brownian Motion, *The Annals of Mathematical Statistics*. 39 (1968) 686–686. doi:10.1214/aoms/1177698432.
- [64]D.G. Kendall, P. Levy, K. Ito, H.P. McKean, M. Kimura, *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien.*, *Biometrika*. 53 (1966) 293. doi:10.2307/2334089.
- [65]and, *Der Verlag von Julius Springer im Jahre 1912*, Springer Berlin Heidelberg, 1982. doi:10.1007/978-3-662-26400-3.
- [66]R.J. Bearman, *Non-Equilibrium Thermodynamics*. S. R. de Groot and P. Mazur. North-Holland Amsterdam Wiley, New York, 1962. x + 510 pp. Illus. \$15.50, Science. 140 (1963) 168–168. doi:10.1126/science.140.3563.168.
- [67]D.T. HAAR, *Stochastic Processes*. J. L. Doob. New York: Wiley London: Chapman & Hall 1953. 654 pp. \$10.00, Science. 118 (1953) 659–660. doi:10.1126/science.118.3074.659.
- [68]S. Prickett, Book Review: Newman and The Common Tradition: A Study in the Language of Church and Society. By John Coulson. Oxford University Press: Clarendon Press 1970. x+279 pp. £2.50. Newman: The Contemplation of Mind. By Thomas Vargish. Oxford University Press: Clarendon Press, 1970. xiv+191 pp. £2.25. Newman and The Common Tradition: A Study in the Language of Church and Society. By CoulsonJohn. Oxford University Press: Clarendon Press, 1970. x+279 pp. £2.50 Newman: The Contemplation of Mind. By VargishThomas. Oxford University Press: Clarendon Press, 1970. xiv+191 pp. £2.25., *Theology*. 75 (1972) 599–600. doi:10.1177/0040571x7207501109.
- [69]D. Cox, H. Miller, *The Theory of Stochastic Processes*, CRC Press, 2017. doi:10.1201/9780203719152.
- [70]A.G. Hawkes, D.R. Cox, H.D. Miller, *The Theory of Stochastic Processes*, *The Mathematical Gazette*. 51 (1967) 261. doi:10.2307/3613271.
- [71]G. ROSEN, xvi + 444 pp. (Vol. 1) U.S. \$39.50 (Vol. 1), R. Aris, *The Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalysts*, Clarendon Press, Oxford University Press (1975).xvi + 217 pp. (Vol. 2). \$25.75 (Vol. 2). R. Aris, *The Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalysts*,

- Clarendon Press, Oxford University Press, England (1975)., Bulletin of Mathematical Biology. 38 (1976) 95–96. doi:10.1016/s0092-8240(76)80048-1.
- [72]G. Braunss, Landau L. D./Lifschitz, E. M., Lehrbuch der Theoretischen Physik V: Statistische Physik, Teil 1. 5., von Lifschitz, E. M./Pitajewski, L. P. bearb. Auflage. Berlin, Akademie-Verlag 1979. XVII 517 S., M 36,-. BN 5436/V, ZAMM - Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Mechanik. 60 (1980) 743–743. doi:10.1002/zamm.19800601228.
- [73]N.G.V.A.N. KAMPEN, STOCHASTIC PROCESSES, in: Stochastic Processes in Physics and Chemistry, Elsevier, 2007: pp. 52–72. doi:10.1016/b978-044452965-7/50006-4.
- [74]H. Risken, Fokker-Planck Equation for Several Variables Methods of Solution, in: The Fokker-Planck Equation, Springer Berlin Heidelberg, 1996: pp. 133–162. doi:10.1007/978-3-642-61544-3_6.
- [75]W.T. Coffey, Y.P. Kalmykov, J.T. Waldron, The Langevin Equation, WORLD SCIENTIFIC, 1996. doi:10.1142/2256.
- [76]R. Durrett, Random walks and random environments. Volume 1: Random walks Barry D. Hughes Oxford University Press, Oxford, 1995. \$88.00 (cloth), 656 pp, Bulletin of Mathematical Biology. 58 (1996) 598–599. doi:10.1016/0092-8240(96)87665-8.
- [77]T. Ito, Y. Tsuchiya, T. Kawakubo, Flatness Change in the Transition to Turbulent Convection, Journal of the Physical Society of Japan. 52 (1983) 361–363. doi:10.1143/jpsj.52.361.
- [78]J. KLAFTER, G. ZUMOFEN, M.F. SHLESINGER, FRACTAL DESCRIPTION OF ANOMALOUS DIFFUSION IN DYNAMICAL SYSTEMS, Fractals. 01 (1993) 389–404. doi:10.1142/s0218348x93000411.
- [79]M.F. Shlesinger, G.M. Zaslavsky, J. Klafter, Strange kinetics, Nature. 363 (1993) 31–37. doi:10.1038/363031a0.
- [80]K.A.R.L. PEARSON, The Problem of the Random Walk, Nature. 72 (1905) 342–342. doi:10.1038/072342a0.
- [81]A. Plonka, Chapter 4. Dispersive Kinetics, Annual Reports Section C (Physical Chemistry). 94 (1998) 89. doi:10.1039/pc094089.