Ejercicios: Intervalos de confianza

Jose M. Camacho[1]

[1]Universidad de Granada

April 13, 2020

Ejercicio 1: A partir de una m.a.s. dada: $X_1, \cdots, X_n; \quad X_i \sim N(\mu, \sigma_o^2)$**construye, usando el método pivotal, un Intervalo de Confianza a nivel** $1-\alpha$ **para la media** μ de una población $X \sim N(\mu, \sigma_0)$ **cuando la varianza** σ_0^2 **es conocida, a partir del estadístico muestral:** $T\left(\vec{X}_n\ ,\ \mu\right) = \frac{\overline{X}_n\ - \mu}{\sigma_0} \cdot \sqrt{n}\ = Z\ \sim N(0,1)$.

Calculamos $\overline{X}_n$:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma_o}{\sqrt{n}}\right)$$

El estadísitico $T\left(\vec{X}_n\ ,\ \mu\right)$ es una variable aleatoria que es función de la muestra, $\vec{X}_n$,y del parámetro a estimar, μ. Asimismo, es una función continua y monótona del parámetro μ, concretamente, fijados σ_0 y $\overline{X}_n$, es una función lineal decreciente en μ de pendiente $\frac{-\sqrt{n}}{\sigma_0}$. Finalmente el estadístico T sigue una distribución de probabilidad, $T\left(\vec{X}_n\ ,\ \mu\right) \sim P = N(0,1)$, que no es función del parámetro a estimar μ.

Una vez comprobado que $T\left(\vec{X}_n\ ,\ \mu\right)$ es una variable aleatoria bien definida para usar el método del pivotal, procedamos entonces a determinar el intervalo de confianza al $100 \cdot (1-\alpha)\ \%$. Puesto que la función de distribución de probabilidad seguida por $T\left(\vec{X}_n\ ,\ \mu\right) = Z \sim N(0,1)$ es una función unimodal (un solo pico), escogemos el intervalo de confianza que es simétrico respecto al pico ne la misma (en $Z=0$), $\left[z_{-\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$. Donde, usando la simetría del intervalo, es directo que $z_{-\frac{\alpha}{2}} = -z_{\frac{\alpha}{2}}$.En terminos de la función de distribución de probabilidad:

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X}_n\ - \mu}{\sigma_0} \cdot \sqrt{n} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

Equivalentemente a este expresión, si usamos la función de probabilidad acumulada $F(Z)$ podemos hayar el extremo $z_{-\frac{\alpha}{2}}$:

$$F\left(Z = -z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -z_{\frac{\alpha}{2}} \tag{1}$$

La existencia de la función inversa F^{-1} viene garantizado por ser F una función sobreyectiva. Ahora bastaría con encontrar el valor $F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ para tener determinado el Intervalo de Confianza. Si queremos pasar del valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ al de $\overline{x}_{\frac{\alpha}{2}}$ basta con deshacer el cambio lineal de variables: $\overline{x}_{\frac{\alpha}{2}} = \bar{x}_n + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, por lo que el intervalo de confianza queda:

$$\left[\bar{x}_n - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_n + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Ejercicio 2: A partir de una m.a.s. dada: $X_1, \cdots, X_n;\qquad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$**construye, usando el método pivotal, un Intervalo de Confianza a nivel** $1-\alpha$ **para la media** μ **de una población** $X \sim N(\mu, \sigma)$ **cuando la varianza poblacional** σ^2 **es desconocida. Usa para ello el estadístico muestral** $T\left(\vec{X}_n;\ S\ , \mu\right) = \frac{(\overline{X}\ - \mu)}{S}\cdot\sqrt{n} = Y \sim t(n-1)$.

El estadístico $T\left(\vec{X}_n;\ S\ , \mu\right)$ es una variable aleatoria que es función de la m.a.s. $\vec{X}_n$, de la estimación de la desviación estandar poblacional, S, y de la media poblacional, μ. Asimismo es una función monótona de μ, concretamente monótona decreciente, puesto que es una función lineal decreciente en μ de pendiente $\frac{-\sqrt{n}}{\sigma}$. Finalmente el estadístico $T\left(\vec{X}_n;\ S\ , \mu\right)$, como variable aleatoria, sigue una distribución de probabilidad t-student con grado de libertad $n-1$: $T\left(\vec{X}_n;\ S\ , \mu\right) = Y \sim t\,(n-1)$, la cual no depende del parámetro a estimar μ.

Una vez comprobado que el estadístico $T\left(\vec{X}_n;\ S\ , \mu\right) = Y$ es una variable aleatoria bien definida para el uso del método del pivotar, procemos a determinar el intervalo de confianza al $100\ \cdot(1-\mu)\ \%$. Al igual que en el caso anterior tenemos una distribución unimodal con pico en $y=0$, por lo que definimos el intervalo de confianza de forma simétrica: $\left[-y_{\frac{\alpha}{2}},\ y_{\frac{\alpha}{2}}\right]$.

En terminos de la función de distribución de probabilidad, la probabilidad de que y esté contenido en el intervalo $\left[-y_{\frac{\alpha}{2}},\ y_{\frac{\alpha}{2}}\right]$:

$$P\left(-y_{\frac{\alpha}{2}} \le y \le\ y_{\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(-y_{\frac{\alpha}{2}} \le \frac{(\overline{X}\ - \mu)}{S}\cdot\sqrt{n} \le\ y_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

Equivalentemente a este expresión, si usamos la función de probabilidad acumulada $F\,(Y)$ podemos hayar el extremo $y_{-\frac{\alpha}{2}}$:

$$F\left(Y = -y_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -y_{\frac{\alpha}{2}} \tag{2}$$

La existencia de la función inversa F^{-1} viene garantizado por ser F una función sobreyectiva. Ahora bastaría con encontrar el valor $F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ para tener determinado el Intervalo de Confianza. Si queremos pasar del valor de $y_{\frac{\alpha}{2}}$ al de $\overline{x}_{\frac{\alpha}{2}}$ basta con deshacer el cambio lineal de variables: $\overline{x}_{\frac{\alpha}{2}} = \bar{x}_n + y_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}$. El intervalo de confianza queda entonces:

$$\left[\bar{x}_n - y_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{x}_n + y_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

Ejercicio 3: A partir de una m.a.s. dada: $X_1, \cdots, X_n;\qquad X_i \sim N(\mu_0, \sigma^2)$**construye, usando el método pivotal, un Intervalo de Confianza a nivel** $1-\alpha$ **para la desviación estandar** σ **de una población** $X \sim N(\mu_0, \sigma)$ **cuando la media poblacional** μ_0 **es conocida. Usa para ello el estadístico muestral** $T\left(\vec{X}_n, \sigma\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i\ - \mu_0)^2}{\sigma^2} = \Xi \sim \chi^2\,(n)$.

El estadistico $T\left(\vec{X}_n, \sigma\right)$ es una variable aleatoria que es función de la m.a.s., $\vec{X}_n$, y del parámetro a determinar varianza poblacional, σ. Respecto a la variable σ es una función continua y monotona decreciente (puesto que $\sigma \in (0, \infty)$). Como variable aleatoria $T\left(\vec{X}_n, \sigma\right) = \Xi \sim \chi^2(n)$, donde χ^2 es una función independiente del parámetro a estimar: σ.

Una vez comprobado que $T\left(\vec{X}_n, \sigma\right)$ es una variable aleatoria bien definida para usar el método del pivotal. Procemos entonces a determinar el itnervalo de confianza al $100 \cdot (1-\alpha)\,\%$. Puesto que la función de distribución de probabilidad seguida por $T\left(\vec{X}_n, \sigma\right) = \Xi \sim \chi^2(n)$, es una distribución unimodal pero no simétrica, debemos tomar el intervalo de confianza de manera más general (no podemos suponer que ambos extremos son iguales en valor absoluto y con signos opuestos): $\left[\xi_{\frac{\alpha}{2}},\ \xi_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$. $\xi_{\frac{\alpha}{2}}$ es el punto del espacio que deja a su izquierda una probabilidad acumulada de $\frac{\alpha}{2}$, mientras que $\xi_{1-\frac{\alpha}{2}}$ deja a su izquierda una probabilidad acumulada de $1-\frac{\alpha}{2}$ y $\frac{\alpha}{2}$ a su derecha.

Por simplicidad en la notación llamo $\kappa = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2$. Bien, en términos de la función de distribución de probabilidad:

$$P\left(\xi_{\frac{\alpha}{2}} \leq \xi \leq \xi_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\xi_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{\sigma^2} \leq \xi_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$P\left(\xi_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\kappa}{\sigma^2} \leq \xi_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

En terminos de la probabilidad acumulada:

$$F\left(\xi = \xi_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \xi_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$F\left(\xi = \xi_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow F^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \xi_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Determinados los extremos del intervalo: $\xi_{\frac{\alpha}{2}},\ \xi_{1-\frac{\alpha}{2}}$odemos deshacer el cambio de variables para obtener el intervalo en unidades de σ^2:

$$P\left(\xi_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\kappa}{\sigma^2} \leq \xi_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\frac{1}{\xi_{1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \frac{\sigma^2}{\kappa} \leq \frac{1}{\xi_{\frac{\alpha}{2}}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{\kappa}{\xi_{1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{\kappa}{\xi_{\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

Por lo que el intervalo queda: $\left[\frac{\kappa}{\xi_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{\kappa}{\xi_{\frac{\alpha}{2}}}\right]$.

Ejercicio 4: A partir de una m.a.s. dada: $X_1, \cdots, X_n$; $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$construye, usando el método pivotal, un Intervalo de Confianza a nivel $1-\alpha$ para la desviación estandar σ de una población $X \sim N(\mu, \sigma)$ cuando la media poblacional μ es desconocida. Usa para ello el estadístico muestral $T\ (\sigma, S) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = w \sim \chi^2(n-1)$.

El estadístico $T\ (\sigma, S)$ es una variable aleatoria que es función de la varianza muestral, S, y del parámetro a determinar varianza poblacional, σ. Respecto a la variable σ es una función continua y monotona decreciente (puesto que $\sigma \in (0, \infty)$). Como variable aleatoria $T \sim \chi^2(n-1)$, donde χ^2 es una función independiente del parámetro a estimar: σ.

Una vez comprobado que $T(\sigma,\ S)$ es una variable aleatoria bien definida para usar el método del pivotal, procedamos entonces a determinar el intervalo de confianza al $100 \cdot (1-\alpha)\ \%$. Puesto que la función de distribución de probabilidad seguida por $T = w \sim \chi^2(n-1)$ es unimodal pero no es simétrica, debemos tomar el intervalo, de manera general: $\left[w_{\frac{\alpha}{2}}\ ,\ w_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$. $w_{\frac{\alpha}{2}}$ es el punto del espacio que deja a su izquierda una probabilidad acumulada de $\frac{\alpha}{2}$, mientras que $w_{1-\frac{\alpha}{2}}$ deja a su izquierda una probabilidad acumulada de $1-\frac{\alpha}{2}$ y $\frac{\alpha}{2}$ a su derecha.

$$P\left(w_{\frac{\alpha}{2}} \leq w \leq w_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(w_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \leq w_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha \tag{3}$$

En termino de la función de probabilidad acumulada:

$$F\left(W = w_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = w_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$F\left(W = w_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow F^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = w_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Determinados los extremos del intervalo, $w_{\frac{\alpha}{2}}, w_{1-\frac{\alpha}{2}}$, podemos deshacer el cambio de variables para obtener el intervalo en unidades de σ^2:

$$P\left(w_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2} \leq w_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\frac{1}{w_{1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \frac{\sigma^2}{(n-1)\,S^2} \leq \frac{1}{w_{\frac{\alpha}{2}}}\right) =$$
$$= P\left(\frac{(n-1)\cdot S^2}{w_{1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)\cdot S^2}{w_{\frac{\alpha}{2}}}\right)$$

Por lo que el intervalo queda: $\left[\frac{(n-1)\cdot S^2}{w_{1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{(n-1)\cdot S^2}{w_{\frac{\alpha}{2}}}\right]$.