Manuscript prepared for Biogeosciences
with version 5.0 of the LaTeX class copernicus.cls.
Date: 1 June 2020

Solución De Ecuaciones Diferenciales

Andrea Aguiluz Rios[1]

[1]Tecnológico Nacional de México - Campus Zacatecas Occidente

Correspondence to: Andrea Aguiluz Rios

Introducción

En el siguiente documento analizaremos diferentes soluciónes de ecuaciones diferenciales, haciendo enfasis en los métodos de un paso, paso multiples y ecuaciones diferenciales ordinarias y como es que existe una relación entre la materia de ecuaciones diferenciales y métodos numéricos

Métodos de un paso

Método de EULER

Es el mas simple de los métodos numéricos resolver un problema del siguiente tipo:

$$PVI = \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \\ y(x_i) = ? \end{cases}$$

Consiste en multiplicar los puntos de intervalos que va de x_0 a x_f en n subintervalos de ancho h osea:

$$h = \frac{x_f - x_0}{n} \tag{1}$$

De esta manera se obtiene un conjunto de discreto de n +1 puntos: x_0, x_1 ,x_2,. . . ,x_n del intervalo de interes [x_0,x_f]. Para cualquiera de estos puntos se cumple que :

$$x_i = x_0 + ih, 0 \leq i \leq n \tag{2}$$

La condición inicial representa el punto P_0=(x_0, y_0) por donde pasa la curva solución de la ecuación de el planteamiento inicial, la cual se denotará como F(x)=y

Ya teniendo en cuenta el punto P_0 se puede evaluar la primera derivada de F(x) en ese punto; por lo tanto:

$$F'(x) = \frac{dy}{dt}|P_0 = f(x_0, y_0) \tag{3}$$

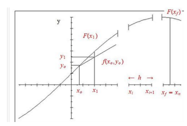

Fig. 1. This is a caption

Con esta información se traza una recta, aquella que pasa por P_0 y de pendiente f(x_0, y_0). Esta recta aproxima F(x) en una vecinidas de x_0. Tómandose la recta como reemplazo de F(x) y localícese en ella (la recta) el valor de y correspondiente a x_1. Entonces, podemos deducir según la Fig.1:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f(x_0, y_0) \tag{4}$$

Se resuelve para y_1 :

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0) f(x_0, y_0) \tag{5}$$

Es evidente que la ordenada y_1 calculada de esta manera no es igual a F(x_1), pues existe un pequeño error. Sin embargo , el valor y_1 sirve para que se aproxime F'(x) en el punto P=(x_1, y_1) y repetir el procedimiento anterior a fin de generar la sucesión de aproximaciones siguientes:

Ejemplo:

Sea el problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = (t-y), y(0) = 2 \tag{6}$$

Encontrar y(1) utilizando el método de Euler de paso h =0.2

- La ecuación diferencial permite ser resuelta por diversos métodos de integración, siendo su solución general:

$$y(t) = t - 1 + ce^{-t}, c \in \mathbb{R} \tag{7}$$

La solución particular que pasa por y(0)=2 es y(t)-1+3e^{-t} lo que es igual a y(1)=1.10364

- A continuación vamos a utilizar el método de Euler

$$y_k + 1 = y_k + hf(t_k.y_k, k = 0,1,2,...,n-1) \tag{8}$$

Para encontrar un valor aproximado de y(1)
h=0.2, n=5, f(t,y) = t-y, (t_0, y_0)=(0.2)
De esta manera:

$$y(0.2) = y_1 = y_0 + hf(t_0,y_0) = 2+0.2(0.0-2) = 1.6 y(0.4) = y_2 = y_1 + hf(t_1,y_1) = 1.6+0.2(0.2-1.6) = 1.32 y(0.6) = y_3 = y_2 + hf(t_2,$$

El error que se comete será de 1.10364-0.98304=0.1092 ->10.92%

Método de Euler Mejorado

Este método se basa en la misma idea del método anterior, pero hace un refinamiento en la aproximación, tomando un promedio entre ciertas pendientes.

La fórmula es la siguiente:

$$Y_{n+1} = y_n + h.[\frac{x_n, y_n + f(x_{n+1}, y_{n+1})}{2}] \tag{9}$$

Donde y^*_{n+1}=y_n+h.f(x_n,y_n)

Para entender esta fórmula, analicemos el primer paso de aproximación, con base en la siguiente gráfica:

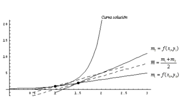

Fig. 2. This is a caption

En la gráfica, vemos que la pendiente promedio corresponde a la pendiente de la recta bisectriz de la recta tangente a la curva en el punto de la condición inicial y la "recta tangente" a la curva en el punto (x_1,y_1) donde es la aproximación obtenida con la primera fórmula de Euler. Finalmente, esta recta bisectriz se traslada paralelamente hasta el punto de la condicción inicial y se considera el valor de la recta en el punto x=x_1 como la aproximación de Euler mejorada

Método de runge-kutta

Es un método genérico de resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Este conjunto de métodos fue inicialmente desarrollado alrededor del año 1900 por los matemáticos C.Runge y M. W. Kutta.

Los métodos de Runge-Kutta(RK) son un conjunto de métodos iterativos (implícitos y explícitos) para la proximación de soluciones de ecuaciones diferenciales, ordinarias, concretamente, del problema de valor inicial, sea:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{10}$$

Una ecuación diferencial ordinaria, con:

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}x\mathbb{R} \to \mathbb{R}_n \tag{11}$$

Donde ω es un conjunto abierto, junto con la condición de que el valor inicial de f sea (t_0, y_0) $\in \omega$. Entonces el método RK (de orden s) tiene la siguiente expresión, en su forma más general:

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s}, b_i k_i \tag{12}$$

Donde h es el paso por iteración, o lo que es lo mismo, el crecimiento δt_n entre los sucesivos puntos t_n y t_{n+1}. Los coeficientes k_i son términos de aproximación intermedios, evaluados en f de manera loca.

$$k_i = f(t_n + hc_i, y_n + h\sum_{i=1}^{s}, a_{ij}k_j)i \tag{13}$$

con a_{ij}, b_i, c_i coeficientes propios del esquema numérico elegido, dependiente de la regla de cuadratura utilizada. Los esquemas Runge-Kutta pueden ser explícitos o implícitos dependiendo de las constantes a_{ij} del esquema. Si esta matriz es triangular inferior con todos los elementos de la diagonal principal iguales a cero; es decir, a_{ij} =0 para j=i. . . s los esquemas son explícitos

Métodos de Pasos Multiples

Utilizan infromación en un solo punto x_i para predecir un valor de la variable dependiente y_{i+1} en un punto futuro x_{i+1}. Procedimientos alternativos, llamados métodos multipaso, se basa en el conocimiento de que una vez empezado el cálculo, se tiene información valiosa de los puntos anteriores y esta a nuestra disposición.

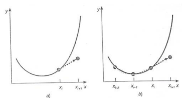

Fig. 3. This is a caption

Los métodos de Euler, Heun, Taylor y Runge-Kuttas se les llaman métodos de un paso, porque en el cálculo de cada punto sólo se usa la información de último punto, mientras que los métodos multipaso utilizan la información de los puntos previos, a saber, y i, y $_{i-1}$ .... y_{i-m+1} para calcular y_{i*1}

Métodos de Adams

Los métodos de Adams son métodos multipasos. Los métodos de Adams se pueden clasificar en dos grandes clases: los métodos de Adams-Bashforthy los métodos de Adams-Moulton. Estos se pueden combinar para formar los métodos predictor-corrector de Adams-Bashforth-Moulton.

La idea fundamental del método de Adams-Bashforth de n pasos es usar un polinomio de interpolación de f(t,y(t)) que pasa por los n puntos:

$(t_i,f_i)(t_i,f_i),\ldots,(t_{i+1},f_{i+1})$.

La idea fundamental del método de Adams-Moulton de n pasos es usar un polinomio de interpolación de f(t,y(t)) que pasa por los n+1 puntos:, $(t_{i-1},f_{i-1}),\ldots,(t_{i+1},f_{i+1})$.

Forma general:

$$y_{i+1} + |\beta h \sum_{j=1}^{n}, \alpha_j f(t_{i-j+1}, y_{i-j+1}) \tag{14}$$

Métodos de Adams.Moulton

La diferencia esencial entre los métodos de Adams-Bashforth y los métodos de Adams-Moulton es que mientras los primeros son explícitos, los segundos son implícitos. La construcción de estos últimos es similar a la de los métodos de Adams-Bashforth, pero en este caso se sustituye la función por el polinomio interpolador que pasa por los puntos:

$$(X_{n+1}, f_{n+1}), (X_n, f_n), (x_{n-1}, f_{n-1})...(x_{n-k+1}, f_{n-k+1}) \tag{15}$$

Método predictor-corrector

En la práctica los métodos multipaso implícitos (por ejemplo:el método de A-M) , no se puede usar directamente. Estos métodos sirven para mejorar las aproximaciones obtenidas con los métodos explícitos. La combinación de un método explícito con un método implícito del mismo orden se denomina un método predictor-corrector.

Ejemplo:

Ecuación:

$$y_h(t) = \ A \ + \ bt \ \ con \ \ A, \ \ B \in \mathbb{R} \tag{16}$$

Consideramos ahora una solución particular de la ecuación completa, de la forma

$$y_p(t) = \ A(t) + B(t)t \tag{17}$$

La utilización del método de variación de parámetros conduce a un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A'(t) + B'(t)t = 0 \\ B'(t) = f(t) \end{cases}$$

Y resolviendo este sistema obtenemos la solución A'(t)= -t f(t), B'(t)=f(t)

Integrando las expresiones anteriores obtendremos los coeficientes que permitan expresar la solución particular del problema completo

$$\begin{cases} A(t) = \int_{t_0}^{t} -sf(s)ds \qquad B(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)ds \end{cases} \tag{18}$$

Entonces la solución general del problema y"(t) = f(t) es la familia biparamerica dada por

$$\begin{cases} y(t) = \quad y_h(t) + y_p(t) = \quad A + Bt + \quad \int_{t_0}^{t} \quad -sf(s)ds + t \quad \int_{t_0}^{t} f(\end{cases} \tag{19}$$

Imponiendo ahora las condiciones iniciales señaladas: $y(t_0)=y_0$,$y'(t_0)=y_0$ resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y_0 = (t_0) = A + Bt_0 \\ y_0 = y'(t_0) = B + (-t_0 f(t_0)) + t_0 f(t_0) = B \end{cases}$$

Resolviendo este sistema lineal en las variables A,B se obtiene que la solución del mismo es:

$$A = \ \ y_0 \ \ - y_0 t_0 \qquad\qquad B = y_0 \tag{20}$$

Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Dada una función y = f(x) vamos a estudiar ecuaciones donde aparecen mezcladas la variable x, la función y y algunas derivadas y'(x).y" (x)... Ejemplos de este tipo de ecuaciones son

$$x\acute{y}(x) = y(x), \acute{y}'(x) = y(x)\acute{y}(x), y^m(x)^2 = \frac{x+\acute{y}(x)}{1+x^2} \quad (21)$$

Llamaremos a ecuación diferencial ordinaria a una ecuación que involucra a una variable independiente x, una función y(x) y una o varias derivadas de y(x).

Llamaremos orden de una EDO al orden de la mayor derivada en la ecuación. Así, por ejemplo, las EDOs.

$$2x + y\acute{y} = 0, x^2\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx}^4 = 1, \frac{d^2y}{dx^2}cosx + cosy = 0 \quad (22)$$

tienen órdenes respectivos 1,3 y 2.

Además, una EDO de orden n diremos que es lineal si se puede escribir de la forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x) \quad (23)$$

Donde las a_i, b son funciones que solo dependen de x.

Ejemplo:

Resolver el P. V. I. y-xy'=a(1+x^2y'), y(1)=2a

Ordenando la ecuación tenemos :

$$\frac{dy}{y-a} = \frac{dx}{x+ax^2} \quad (24)$$

y usando fracciones parciales:

$$\frac{dy}{y-a} = (\frac{1}{x} - \frac{a}{ax+1})dx \quad (25)$$

Esta es una ecuación de variables separables, por lo que integrando obtenemos:

$$ln(y-a) = lnx - ln(ax+1) + \ ln \ C \quad (26)$$

Usando las propiedades del logaritmo:

$$y \ - \ a = C\frac{x}{ax+1} \quad (27)$$

Reemplazando las condiciones iniciales,

$$C = \ a(a+1) \quad (28)$$

Así, la solución del P. V. I. es :

$$y(x) = \frac{x(2a^2+a)+a}{ax+1} \quad (29)$$

Conclusión

La relación que existe al momento de resolver métodos numéricos y ecuaciones diferenciales hace que al enterder algúna de las dos materias, puedas comprender de una manera más rápida y simple la otra materia. Cada una de las formulas escritas, a simple vista parecen ser muy complicadas, pero analizando el tema detenidamente podremos encontrar mucha cuerencia y nos facilita muchisimo el entendimiento de la materia, solo es cuestión de analizar adecuadamente

Bibliografía

https://sites.google.com/site/metodosnumericosmecanica/home/unidad-vi/62-mtodos-de-un-paso-mtodo-de-euler-mtodo-de-euler-mejorado-y-mt

http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/PIE/Analisis%20matematico/Temas/C14_Metodos_Multipaso.pdf

https://www.ugr.es/~jagalvez/pdfs/M1_T4.pdf

http://matema.ujaen.es/jnavas/web_modelos/problemas/ptema7.pdf

https://gredos.usal.es/bitstream/handle/10366/124172/DMAA_LorenzoGonz%E1lez_Ces%E1reo_tesis.pdf;jsessionid=62AA4A5EB9902E3EB2FB2413837F1D81?sequence=1